المركز الوطني لتطوير المناهج والتقويم
National Center for Curriculum Development and Evaluation

المملكة الأردنية الهاشمية
وزارة التربية والتعليم

الرياضيات

الصف التاسع - كتاب الطالب

الفصل الدراسي الأول

9

فريق التأليف

د. عمر محمد أبوغليون (رئيسًا)

هبه ماهر التميمي | إبراهيم أحمد عمايرة | د. سميرة حسن أحمد

الناشر: المركز الوطني لتطوير المناهج والتقويم

يسر المركز الوطني لتطوير المناهج والتقويم استقبال آرائكم وملحوظاتكم على هذا الكتاب عن طريق العناوين الآتية:

06-5376262 / 237 | 06-5376266 | P.O.Box: 2088 Amman 11941

@nccdjor | feedback@nccd.gov.jo | www.nccd.gov.jo

قـرّرت وزارة التربيـة والتعليـم تدريـس هذا الكتـاب في مدارس المملكـة الأردنية الهاشـمية جميعها، بنـاءً على قـرار المجلس الأعلى للمركـز الوطنـي لتطويـر المناهـج والتقويـم في جلسـته رقـم (2022/4)، تاريـخ 2022/6/19 م، وقـرار مجلس التربيـة والتعليـم رقم (2022/44) تاريـخ 2022/7/6 م بـدءًا مـن العـام الـدراسي 2022 / 2023 م.

- Prepared Originally in English for the National Center for Curriculum Development and Evaluation. Amman - Jordan
- Translated to Arabic, adapted, customised and published by the National Center for Curriculum Development and Evaluation. Amman - Jordan

ISBN: 978 - 9923 - 41 - 408 - 8

المملكة الأردنية الهاشمية
رقم الإيداع لدى دائرة المكتبة الوطنية
(2023/2/782)

373.19

الأردن. المركز الوطني لتطوير المناهج

كتـاب الطالـب: الصـف التاسـع: الفصـل الدراسـي الأول/ المركـز الوطنـي لتطويـر المناهـج.- عمـان: المركـز، 2023

(151) ص.

ر.إ.: 2023/2/782

الواصفات: / الرياضيات// الكتب الدراسية// أساليب التدريس// التعليم الإعدادي

يتحمل المؤلف كامل المسؤولية القانونية عن محتوى مُصنَّفه، ولا يعبّر هذا المُصنَّف عن رأي دائرة المكتبة الوطنية.

British Library Cataloguing -in- Publication Data
A catalogue record for this publication is available from the Library.

الطبعة الأولى 1443 هـ / 2022 م

الطبعة الثانية 1447 هـ / 2026 م

المقدّمة

الحمد لله ربّ العالمين، والصلاة والسلام على أشــرف الأنبياء والمرسلين، وبعد؛ فانطلاقًا من إيمان المملكة الأردنية الهاشــمية الراسخ بأهمية تنمية قدرات الإنسان الأردني، وتسـليحه بالعلم والمعرفة؛ سعى المركز الوطني لتطوير المناهج والتقويم بالتعاون مع وزارة التربية والتعليم إلى تحديث المناهج الدراسـية وتطويرها، لتكون معينًا على الارتقاء بمسـتوى الطلبـة المعرفي، ومجاراة الأقران في الدول المتقدمة. ولمّا كانت الرياضيات إحدى أهمّ الموادّ الدراسـية التي تنمّي لدى الطلبة مهارات التفكير وحَلِّ المشـكلات، فقد أَوْلى المركز هذا المبحث عناية كبيرةً، وحرص على إعداد كتب الرياضيات وفق أفضل الطرائق المُتَّبَعة عالميًّا على أيدي خبرات أردنية؛ لضمان انسجامها مع القيم الوطنية الراسخة، وتلبيتها لاحتياجات طلبتنا.

ورُوعي في إعداد كتب الرياضيات تقديم المحتوى بصورة سلسة، ضمن سياقات حياتية شائقة، تعزز دافعية الطلبة نحو التعلم. وتمّ التأكيد على توظيف التكنولوجيا بشكل حصيف بوصفها أداة فاعلة في بناء المفاهيم الرياضية وتطوير المهارات التقنية لدى الطلبة، كما احتوت الكتب على أنشطة مفاهيمية تُسهم بشكل فاعل في استكشاف المفاهيم الرياضية لدى الطلبة وتعميق فهمهم لها. وقد احتوت الكتب على مشـروع لـكل وحدة؛ لتعزيز تعلُّم الطلبة المفاهيـم والمهارات الواردة فيها وإثرائها، ولأن التدريب المكثّف على حلّ المسائل يُعدّ إحدى أهم طرق ترسيخ المفاهيم الرياضية وزيادة الطلاقة الإجرائية لـدى الطلبة؛ فقد أُعِـدّ كتاب التمارين على نحو يقدّم للطلبة ورقة عمل في كل درس، تُحَـلّ بعضُها واجبًا منزليًّا، أو داخل الغرفة الصفية إن توافر الوقت الكافي. ولأنّنا ندرك جيدًا حرص الكوادر التعليمية الأردنية على تقديم أفضل ما لديها للطلبة؛ فقد جاء كتاب التمارين أداةً مساعدة توفّر عليها جهد إعداد أوراق العمل وطباعتها.

وانطلاقًا من أهمية الاتساق والتتابع في بناء تعلُّم الرياضيات، روعي في إعداد هذا الكتاب أن يكون جزءًا من بنية منهجية موحّدة تمتد عبر الصفوف الدراسـية المتتابعة، بحيث تتدرّج المفاهيم والمهارات بصورة مترابطة ومنظمة، وتبنى الخبرات الجديدة على ما سـبقها من تعلُّم. ويهدف هذا التنظيم إلى ضمان سلاسة انتقال الطلبة بين الصفوف، وتعزيز الفهم العميق للمفاهيم، وتجنُّب التكرار غير المُبرَّر أو الفجوات المعرفية، بما يسهم في تحقيق نمو رياضي متوازن ومتراكم لدى الطلبة.

ونحـن إذ نقدّم هذا الكتاب، نأمل أن ينال إعجاب طلبتنا والكوادر التعليمية الأردنية، ويجعل تعليم الرياضيات وتعلّمها أكثر متعةً وسهولةً، ونعد بأن نستمرَّ في تحسين هذا الكتاب في ضوء ما يصلنا من ملاحظات.

المركز الوطني لتطوير المناهج والتقويم

قائمةُ المحتوياتِ

قائمةُ المحتوياتِ

الوحدةُ

1

المُتبايناتُ الخطيَّةُ

Linear Inequalities

ما أهمّيّةُ هذهِ الوحدةِ؟

تُســتعمَلُ المُتبايناتُ في كثيرٍ مِــنَ المواقفِ الحياتيَّةِ والعلميَّةِ للتعبيرِ عــنْ مقاديرَ ذاتِ قِيَمٍ مشــروطةٍ، مثلِ درجةِ الحرارةِ الَّتي يمكنُ أنْ تعيشَ فيها أسماكُ الزينةِ، كما تُستعمَلُ للتعبيرِ عَنِ التكلفةِ الممكنةِ لإنتاجِ ســلعةٍ ما أو الرِّبحِ الذي يمكنُ تحقيقُهُ عندَ بيعِها.

تعلَّمْتُ سابقًا:

- ✓ حلَّ مُعادلاتٍ خطيَّةٍ بمُتغيرٍّ واحدٍ.
- ✓ حــلَّ مُتباينةٍ خطيَّةٍ بأكثــرَ مِنْ خُطوةٍ، وتمثيلَ حلِّها على خطِّ الأعدادِ.
- ✓ تمثيلَ المُعادلةِ الخطيَّةِ في المُســتوى الإحداثيِّ.

سأتعلَّم في هذه الوحدةِ:

- ◄ التعبيرَ عنِ المُتبايناتِ باســتعمالِ المجموعاتِ والفتراتِ.
- ◄ حلَّ مُتبايناــاتٍ مُركَّبةٍ، وتمثيــلَ مجموعةِ حلِّها على خطِّ الأعدادِ.
- ◄ تمثيلَ مُتباينةٍ خطيَّةٍ بمُتغيِّرَينِ بيانيًّا.

مشروعُ الوحدةِ

المُتبايناتُ والعلومُ

فكرةُ المشروعِ توظيفُ المُتبايناتِ الخطيَّةِ في مواقفَ علميَّةٍ مختلفةٍ.

الموادُّ والأدواتُ شبكةُ الإنترنت.

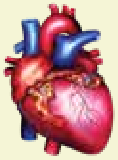
خطواتُ تنفيذِ المشروعِ:

1 أختارُ ثلاثةَ موضوعاتٍ ممّا يأتي، وأبحثُ في شبكةِ الإنترنت عَنْ موقفٍ في كلٍّ منها، وأعبِّرُ عنهُ باستعمالِ طريقةِ سردِ العناصرِ وطريقةِ الصِّفَةِ المُميِّزةِ:

- جسمُ الإنسانِ.
- الموادُّ الكيميائيَّةُ.
- الزراعةُ.
- علومُ الأرضِ والبيئةِ.
- الآلاتُ والأدواتُ.
- الرياضةُ.

2 أختارُ اثنَيْنِ مِنَ الموضوعاتِ السابقةِ، وأبحثُ عَنْ موقفٍ في كلٍّ منهُما يمكنُ التعبيرُ عنهُ باستعمالِ مُتباينةٍ مُركَّبةٍ.

ينبضُ قلبُ الإنسانِ مِنْ 60 إلى 100 نبضةٍ في الدقيقةِ في أثناءِ الراحةِ.



3 أكتبُ مسألةً حياتيَّةً على كلٍّ مِنَ الموقفَيْنِ اللذَيْنِ اخترتُهُما في الخطوةِ السابقةِ، وَأَحُلُّ المسألَتَيْنِ باستعمالِ حلِّ المُتبايناتِ المُركَّبةِ، وأمثّلُ الحلَّ على خطِّ الأعدادِ.

4 أختارُ اثنَيْنِ مِنَ الموضوعاتِ السابقةِ، وأبحثُ عَنْ موقفٍ في كلٍّ منهُما يمكنُ التعبيرُ عنهُ باستعمالِ مُتباينةٍ خطيَّةٍ بِمتغيِّرَينِ.

5 أكتبُ مسألةً حياتيَّةً مرتبطةً بالموقفِ الذي اخترتُهُ في الخطوةِ السابقةِ، وأمثّلُ حلَّها في المُستوى الإحداثيِّ.

عرضُ النتائجِ:

- أُعِدُّ عرضًا تقديميًّا لجميعِ المواقفِ العلميَّةِ التي اخترتُها، وأدعّمُ كلًّا منها بصورةٍ مناسبةٍ، وأضيفُ إلى العرضِ المسائلَ الحياتيَّةَ التي كتبتُها وَحُلولَها.
- أقدّمُ العرضَ التقديميَّ الذي أعددتُهُ أمامَ زُملائي/ زَميلاتي.

الدرس 1

المجموعاتُ والفتراتُ
Sets and Intervals

فكرةُ الدرسِ

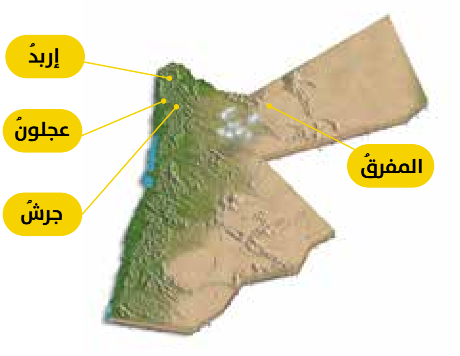
- كتابةُ المجموعاتِ باستعمالِ طريقتَي: سردِ العناصرِ، والصِّفةِ المُميِّزةِ للمجموعةِ.
- التعبيرُ عَنِ المُتبايناتِ باستعمالِ الفتراتِ.

المصطلحاتُ

مجموعةٌ، عنصرٌ، سردُ العناصرِ، الصِّفةُ المُميِّزةُ للمجموعةِ، المجموعةُ الخاليةُ، المجموعةُ المفردةُ، المجموعةُ المنتهيةُ، المجموعةُ غيرُ المنتهيةِ، رمزُ الفترةِ، المالانهايةُ، الفترةُ غيرُ المحدودةِ.

مسألةُ اليومِ

يُبيّنُ الشكلُ المُجاورُ مواقعَ بعضِ المُحافظاتِ على خريطةِ المملكةِ الأردنيَّةِ الهاشميَّةِ. ما الصِّفةُ الَّتي تشتركُ فيها المُحافظاتُ الَّتي تظهرُ على الخريطةِ؟



المجموعةُ وطرائقُ التعبيرِ عنها

المجموعةُ (set) تجمعُ أشياءَ مُتمايزةً تحملُ صفةً مشتركةً، وتسمّى كلٌّ مِنَ الأشياءِ الَّتي تكوِّنُ المجموعةَ **عُنصرًا** (element)، ويمكنُ أنْ تكونَ عناصرُ المجموعةِ أحرفًا أو أعدادًا أو كلماتٍ غيرَ مُكرَّرةٍ. فمثلًا، يُعَدُّ يومُ الأحدِ عُنصرًا مِنْ عناصرِ مجموعةِ أيامِ الأُسبوعِ.

تُستعمَلُ الأحرفُ الكبيرةُ لتسميةِ المجموعاتِ، مثلِ: $A, B, C, X, Y, \ldots$، وتُستعمَلُ الأحرفُ الصغيرةُ لتسميةِ عناصرِ المجموعةِ، مثلِ: $a, b, c, x, y, \ldots$.

إذا كانَ a عنصرًا مِنْ عناصرِ المجموعةِ A، فإنَّنا نقولُ إنَّ a ينتمي إلى المجموعةِ A، ونكتبُ ذلكَ على الصورةِ: $a \in A$؛ حيثُ يستعملُ الرمزُ ($\in$) للدلالةِ على (ينتمي إلى). ومِنْ ناحيةٍ أُخرى إذا كانَ b لا ينتمي إلى المجموعةِ A، فإنَّنا نكتبُ ذلكَ على الصورةِ: $b \notin A$؛ حيثُ يستعملُ الرمزُ ($\notin$) للدلالةِ على (لا ينتمي إلى).

يمكنُ التعبيرُ عَنِ المجموعةِ بطريقةِ **ســردِ العناصــرِ** (roster form)، بحيثُ تُكتَبُ عناصرُ المجموعةِ داخلَ رمزِ المجموعــةِ { }، وَيُفْصَلُ بينَ كلِّ عنصرٍ وآخَرَ بفاصلةٍ. فمثلًا، نُعبّرُ عَنِ المجموعةِ A، الَّتي عناصرُها الأعدادُ الكُلِّيَّةُ الّتي تقلُّ عنْ أوْ تُســاوي 3، بطريقةِ سردِ العناصرِ على الصورةِ: $A = \{0, 1, 2, 3\}$.

يمكــنُ أيضــا التعبيــرُ عَــنِ المجموعــةِ باســتعمالِ **الصِّفــةِ المُميّــزةِ للمجموعــةِ** (set–builder notation). فمثلًا، يمكنُ التعبيرُ عَنِ المجموعةِ $A = \{0, 1, 2, 3\}$ بطريقةِ الصفةِ المُميَّزةِ $A = \{x \mid x \le 3, x \in W\}$، وَتُقــرَأُ: مجموعةُ الأعدادِ x؛ حيثُ ينتمي x إلى مجموعةِ الأعدادِ الكُلِّيَّةِ الَّتي تقلُّ عَنْ أوْ تُساوي 3.

رُموزٌ رياضيَّةٌ

يُرمَــزُ إلــى مجموعــةِ الأعدادِ الكُلِّيَّةِ بالرَّمزِ W، وَهِيَ: $\{0, 1, 2, 3, \ldots\}$، وهوَ الحــرفُ الأوّلُ مِنْ كلمــةِ whole باللغــةِ الإنجليزيَّةِ، وتعني كلِّيًّا.

مثال 1

أعبِّرُ عَنْ كلٍّ مِنَ المجموعاتِ الآتيةِ باستعمالِ طريقةِ سردِ العناصرِ، وطريقةِ الصِّفةِ المُميِّزةِ:

1 **مجموعةُ الأعدادِ الكُليّةِ الّتي تقلُّ عَنْ 12**

طريقةُ سردِ العناصرِ: $E = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$

طريقةُ الصِّفةِ المُميّزةِ: $E = \{x \mid x < 12, x \in W\}$

أتعلّمُ

ترتيبُ العناصرِ غيرُ مهمٍّ في طريقةِ سردِ العناصرِ، ولا أُكَرِّرُ كتابَةَ العُنصُرِ.

2 **مجموعةُ مُضاعفاتِ العددِ 5 الّتي تقلُّ عَنْ أوْ تساوي 25**

طريقةُ سردِ العناصرِ: $C = \{5, 10, 15, 20, 25\}$

طريقةُ الصِّفةِ المُميِّزةِ: $C = \{x \mid x = 5k, k \in W, 0 < k \le 5\}$

أتذكَّرُ

مُضاعَفُ العــددِ هُوَ ناتجُ ضربِهِ في أيِّ عددٍ كُلّيٍّ ما عدا الصِّفرَ.

3 **مجموعةُ حلِّ المُعادلةِ $2x - 8 = 0$**

طريقةُ سردِ العناصرِ: $S = \{4\}$

طريقةُ الصِّفةِ المُميِّزةِ: $S = \{x \mid 2x - 8 = 0\}$

أتحقّقُ من فهمي

أعبرٌ عنْ كلٍّ مِنَ المجموعاتِ الآتيةِ باستعمالِ طريقةِ سردِ العناصرِ، وطريقةِ الصِّفةِ المُميِّزةِ:

a) مجموعةُ الأعدادِ الكُليَّةِ الَّتي تقلُّ عَنْ 8

b) مجموعةُ مُضاعفاتِ العددِ 3 الَّتي تقلُّ عَنْ 18

c) مجموعةُ حلِّ المُعادلةِ $3x - 2 = 0$

أنواعُ المجموعاتِ

توجدُ عِدَّةُ أنواعٍ للمجموعاتِ تبعًا لعددِ عناصرِها، منها:

- **المجموعةُ الخاليةُ** (empty set): هِيَ المجموعةُ الَّتي لا تحتوي على أيِّ عنصرٍ، ويُرمَزُ إليها بالرَّمزِ $\varnothing$ (ويُقرَأُ فاي) أوِ الرَّمزِ { }، ومِنْ أمثلتِها مجموعةُ الأعدادِ الفرديَّةِ الَّتي تقبَلُ القِسمَةَ على 2، فمِنَ المعلومِ أنَّهُ لا يوجدُ عددٌ فرديٌّ يقبَلُ القِسمَةَ على 2
- **المجموعةُ المفردةُ** (singleton set): هِيَ المجموعةُ الَّتي تحتوي على عنصرٍ واحدٍ فقط، ومِنْ أمثلتِها مجموعةُ حلِّ المُعادلةِ $x + 8 = 0$؛ فهِيَ تحتوي على عنصرٍ واحدٍ فقط، هُوَ -8
- **المجموعةُ المُنتهيةُ** (finite set): هِيَ المجموعةُ الَّتي تحتوي على عددٍ محدّدٍ منَ العناصرِ، مثلُ $H = \{4, 8, \ldots, 24, 28, 32\}$؛ حيثُ تحتوي على 4 عناصرَ.
- **المجموعةُ غيرُ المُنتهيةِ** (infinite set): هِيَ المجموعةُ الَّتي تحتوي على عددٍ لا نهائيٍّ منَ العناصرِ، مثلُ مجموعةِ الأعدادِ الكُليَّةِ الَّتي تزيدُ على 7، وهِيَ: $P = \{8, 9, 10, \ldots\}$

أتعلَّمُ

تُستعمَلُ النِّقاطُ الثلاثُ "..." للدّلالةِ على أنَّ المجموعةَ غيرُ منتهيةٍ، وتُستعمَلُ أيضًا للدّلالةِ على اختصارِ عناصرِ مجموعةٍ منتهيةٍ.

مثال 2

أكتبُ كلَّ مجموعةٍ ممّا يأتي بطريقةِ سردِ العناصرِ، ثُمَّ أحدّدُ ما إذا كانتْ خاليةً، أمْ مفردةً، أمْ منتهيةً، أمْ غيرَ منتهيةٍ:

1) $P = \{x \mid x > -3, x \in Z\}$

تمثِّلُ P مجموعةَ الأعدادِ الصَّحيحةِ الَّتي تزيدُ على -3، وتُكتَبُ بطريقةِ سردِ العناصرِ كما يأتي:

$$P = \{-2, -1, \ldots\}$$

إذنْ، المجموعةُ P غيرُ منتهيةٍ.

رُموزٌ رياضيَّةٌ

يُرمَزُ إلى مجموعةِ الأعدادِ الصَّحيحةِ بالرَّمزِ Z، وهِيَ: $\{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$

أتعلَّمُ

يُستعملُ المقدارُ $2k+1$ للدَّلالـةِ علـى الأعدادِ الفرديَّـةِ حيـثُ k عـددٌ صحيحٌ. فمثـلًا، العددُ 7 عددٌ فرديٌّ، ويمكنُ كتابتُهُ على الصورةِ:

$7 = 2(3) + 1$

2 $\boldsymbol{O = \{x \mid x = 2k+1, k \in Z\}}$

تمثِّلُ O مجموعةَ الأعدادِ الصحيحةِ الفرديَّةِ، وَتُكتَبُ بطريقةِ سردِ العناصرِ كما يأتي:

$$O = \{\ldots, -5, -3, -1, 1, 3, 5, \ldots\}$$

إذنْ، المجموعةُ O غيرُ منتهيةٍ.

3 $\boldsymbol{D = \{x \mid 3x - 12 = 0\}}$

تمثِّلُ D مجموعةَ حلِّ المُعادلةِ $3x - 12 = 0$، وَتُكتَبُ بطريقةِ سردِ العناصرِ كما يأتي:

$$D = \{4\}$$

إذنْ، المجموعةُ D مفردةٌ.

4 $\boldsymbol{M = \{x \mid x = 3k, k \in W, 0 < x < 2\}}$

تمثِّلُ M مجموعةَ مُضاعفاتِ العددِ 3، الَّتي تقلُّ عَنْ 2. وَبما أنَّهُ لا توجدُ أعدادٌ تحقِّقُ هذهِ القاعدةَ، فالمجموعةُ M خاليةٌ، وَيُرمَزُ إليها بالرَّمزِ $\varnothing$ أوِ الرَّمزِ $\{\ \}$.

5 $\boldsymbol{T = \{x \mid x = \frac{1}{k}, k \in W, 1 < k < 4\}}$

تمثِّـلُ T مجموعةَ مقلوبِ الأعدادِ الكُلِّيَّةِ الَّتي تقلُّ عـنْ 4 وتزيدُ على 1، وَتُكتَبُ بطريقةِ سردِ العناصرِ كما يأتي:

$$T = \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right\}$$

إذنْ، المجموعةُ T منتهيةٌ.

أتحقّقُ من فهمي

أكتبُ كلَّ مجموعةٍ ممّا يأتي بطريقةِ سـردِ العناصرِ، ثـمَّ أحدّدُ ما إذا كانتْ خاليةً، أمْ مفردةً، أمْ منتهيةً، أمْ غيرَ منتهيةٍ:

a) $P = \{x \mid x > 10, x \in W\}$

b) $O = \{x \mid x = 2k, k \in Z\}$

c) $D = \{x \mid 0.5x + 10 = 0\}$

d) $D = \{x \mid x < 0, x \in W\}$

e) $T = \{x \mid x = k^2, k \in W, k < 5\}$

المُتبايناتُ والصِّفةُ المُميِّزةُ للمجموعةِ

تعلَّمْتُ سابقًا حلَّ المُتبايِنةِ الخطيَّةِ، وكانَ مِنَ الصَّعبِ كتابةُ جميعِ القِيَمِ الَّتي تحقِّقُ المُتباينةَ؛ لِذا لجأتُ إلى تمثيلِ تلكَ القِيَمِ على خطِّ الأعدادِ، ولكنَّ استعمالَ الصِّفةِ المُميِّزةِ للمجموعةِ يوفِّرُ طريقةً مُختصرةً للتعبيرِ عَنْ مجموعةِ حلِّ المُتباينةِ.

مثال 3

أكتبُ مجموعةَ حلِّ كلِّ مُتباينةٍ ممّا يأتي باستعمالِ الصِّفةِ المُميِّزةِ:

1 $\mathbf{5x - 8 > 12}$

المُتباينةُ الأصليَّةُ	$5x - 8 > 12$
بِجَمعِ 8 لِطرفَي المُتباينةِ	$5x - 8 + 8 > 12 + 8$
بِقسمةِ طرفَي المُتباينةِ على 5	$\frac{5x}{5} > \frac{20}{5}$
بالتبسيطِ	$x > 4$

إذنْ، مجموعةُ الحلِّ هِيَ $\{x \mid x > 4\}$

2 $\mathbf{3x - 4 \geq 6x + 11}$

المُتباينةُ الأصليَّةُ	$3x - 4 \geq 6x + 11$
بِجَمعِ 4 لِطرفَي المُتباينةِ	$3x - 4 + 4 \geq 6x + 11 + 4$
بِطرحِ $6x$ مِنْ طرفَي المُتباينةِ	$3x - 6x \geq 6x - 6x + 15$
بِقسمةِ طرفَي المُتباينةِ على -3، وتغييرِ اتّجاهِ رمزِ المُتباينةِ	$\frac{-3x}{-3} \leq \frac{15}{-3}$
بالتبسيطِ	$x \leq -5$

إذنْ، مجموعةُ الحلِّ هِيَ $\{x \mid x \leq -5\}$

أتعلَّمُ

تدلُّ المجموعةُ $\{x \mid x > 4\}$ على أنَّ مجموعةَ الحلِّ هِيَ جميعُ الأعدادِ الحقيقيَّةِ الأكبرِ مِنْ 4

أتذكَّرُ

إذا قُسِمَ (أوْ ضُرِبَ) كلٌّ مِنْ طرفَيْ مُتباينةٍ صحيحةٍ على عددٍ سالبٍ فيجبُ تغييرُ اتِّجاهِ رمزِ المُتباينةِ لِجعلِ المُتباينةِ الناتجةِ صحيحةً أيضًا.

أتحقَّقُ من فهمي

أكتبُ مجموعةَ حلِّ كلِّ مُتباينةٍ ممّا يأتي باستعمالِ الصِّفةِ المُميِّزةِ:

a) $2x + 10 \leq 14$

b) $3x + 3 < 4x - 5$

المُتبايناتُ والفتراتُ

تعلَّمتُ في المثالِ الســابقِ كتابةَ مجموعةِ حلِّ المُتباينةِ باستعمالِ الصِّفةِ المُميِّزةِ للمجموعةِ، ويمكنُ أيضًا استعمالُ **رمزِ الفترةِ** (interval notation) لكتابةِ مجموعةِ حلِّ المُتباينةِ.

يُســتعمَلُ رمــزا **المالانهايــةِ** (infinity) أدنــاهُ للدَّلالــةِ علــى أنَّ **الفتــرةَ غيــرُ محدودةٍ** (unbounded interval) في الاتِّجاهِ الموجبِ أوِ السالبِ.

∞

يُقرَأُ الرَّمزُ: المالانهايةَ الموجبةَ، وَيُستعمَلُ للدَّلالــةِ على أنَّ الفترةَ غيــرُ محدودةٍ في الاتِّجاهِ الموجبِ.

$-\infty$

يُقرَأُ الرَّمزُ: المالانهايةَ الســالبةَ، وَيُستعمَلُ للدَّلالــةِ على أنَّ الفترةَ غيــرُ محدودةٍ في الاتِّجاهِ السالبِ.

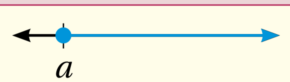
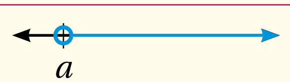
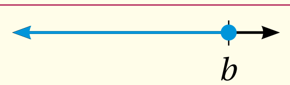
يُســتعمَلُ الرَّمزُ] أوِ الرَّمزُ [عندما يكونُ رمزُ المُتباينةِ $\geq$ أوْ $\leq$ للدَّلالةِ على انتماءِ طرفِ الفترةِ إليها، وَيُســتعمَلُ الرَّمزُ) أوِ الرَّمزُ (عندما يكونُ رمزُ المُتباينةِ $>$ أوْ $<$ للدَّلالةِ على عدمِ انتماءِ طرفِ الفترةِ إليها.

وفي ما يأتي تلخيصٌ لأشكالِ الفتراتِ غيرِ المحدودةِ وكيفيَّةِ تمثيلِ كلٍّ منها على خطِّ الأعدادِ:

مفهومٌ أساسيٌّ

الفتراتُ غيرُ المحدودةِ

إذا كانَ a وَ b عددَيْنِ حقيقيَّيْنِ، فيمكنُ التعبيرُ عَنْ كلٍّ مِنَ المُتبايناتِ الآتيةِ باستعمالِ فترةٍ غيرِ محدودةٍ:

المُتباينةُ	رَمزُ الفترةِ	التمثيلُ على خطِّ الأعدادِ
$x \geq a$	$[a, \infty)$	
$x > a$	(a, ∞)	
$x \leq b$	$(-\infty, b]$	
$x < b$	$(-\infty, b)$	
	$(-\infty, \infty)$	

أتعلَّمُ

يُستعمَلُ الرَّمزُ) أوِ الرَّمزُ (دائمًا مــعَ المالانهايةِ، إذْ إنَّ المالانهايةَ ليستْ عددًا ولا يمكــنُ احتواؤها في فترةٍ.

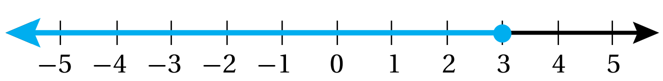
مثال 4

أكتبُ كلَّ مُتباينةٍ ممّا يأتي باستعمالِ رمزِ الفترةِ، ثمَّ أمثّلُها على خطِّ الأعدادِ:

1 $x \leq 3$

رمزُ الفترةِ: $(-\infty, 3]$

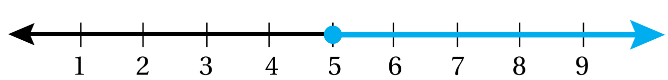
التمثيلُ على خطِّ الأعدادِ:



2 $x \geq 5$

رمزُ الفترةِ: $[5, \infty)$

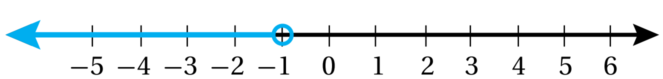
التمثيلُ على خطِّ الأعدادِ:



3 $x < -1$

رمزُ الفترةِ: $(-\infty, -1)$

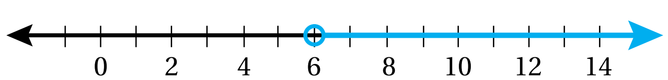
التمثيلُ على خطِّ الأعدادِ:



4 $x > 6$

رمزُ الفترةِ: $(6, \infty)$

التمثيلُ على خطِّ الأعدادِ:



أتذكَّرُ

تُستعمَلُ الدائرةُ المفتوحةُ على خطِّ الأعدادِ إذا كانَ رمزُ المُتباينةِ < أوْ >، أمّا الدائرةُ المغلقةُ فَتُستعمَلُ إذا كانَ رمــزُ المُتباينةِ ≤ أوْ ≥.

أتحقَّقُ مِنْ فهمي

أكتبُ كلَّ مُتباينةٍ ممّا يأتي باستعمالِ رمزِ الفترةِ، ثمَّ أمثّلُها على خطِّ الأعدادِ:

a) $x \leq -2$

b) $x \geq 10$

c) $x < 8$

d) $x > -7$

أتدرَّبُ وأحُلُّ المسائلَ

أعبّرُ عَنْ كلٍّ مِنَ المجموعاتِ الآتيةِ باستعمالِ طريقةِ سردِ العناصِرِ، وطريقةِ الصِّفةِ المُميِّزةِ:

1 مجموعةُ الأعدادِ الكُليَّةِ الَّتي تزيدُ على أوْ تُساوي 20

2 مجموعةُ مُضاعفاتِ العددِ 4 الَّتي تقلُّ عَنْ 50

3 مجموعةُ الأعدادِ الفرديَّةِ الَّتي تزيدُ على أوْ تُساوي 11

4 مجموعةُ الأعدادِ الصَّحيحةِ الَّتي تقلُّ عَنْ -4

5 مجموعةُ الأعدادِ الزوجيَّةِ الَّتي تقلُّ عَنْ أوْ تُساوي 100

6 مجموعةُ حلِّ المُعادلةِ $5x - 30 = 0$

7 مجموعةُ مُضاعفاتِ العددِ 5 الَّتي تقلُّ عَنْ 4

8 مجموعةُ الأعدادِ الكُليَّةِ الَّتي لا تقلُّ عنْ 1 ولا تزيدُ على 15

أكتبُ كلَّ مجموعةٍ ممّا يأتي بطريقةِ سردِ العناصِرِ، ثمَّ أحدّدُ ما إذا كانتْ خاليةً، أمْ مفردةً، أمْ منتهيةً، أمْ غيرَ منتهيةٍ:

9 $A = \{x \mid x \in W, x \leq 1\}$

10 $B = \{x \mid 3x + 1 = 0\}$

11 $C = \{x \mid x < 2, x \in Z\}$

12 $D = \{x \mid x^2 = x, x \in Z\}$

13 $E = \{x \mid x = 6k, k \in W, 0 < x < 5\}$

14 $T = \{x \mid x = k^3, k \in W, x < 80\}$

أكتبُ مجموعةَ حلِّ كلِّ مُتباينةٍ ممّا يأتي باستعمالِ الصِّفةِ المُميِّزةِ:

15) $7 + 6x < 19$

16) $2(y + 2) - 3y \geq -1$

17) $18x - 5 \leq 3(6x - 2)$

أكتبُ كلَّ مُتباينةٍ ممّا يأتي باستعمالِ رمزِ الفترةِ، ثمَّ أمثّلُها على خطِّ الأعدادِ:

18) $x < -7$

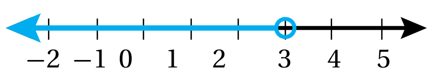
19) $x > 12$

20) $x \leq 1$

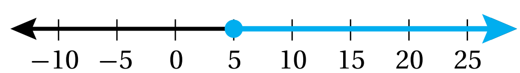
21) $x \geq -20$

أكتبُ المُتباينةَ الممثّلةَ على خطِّ الأعدادِ في كلِّ ممّا يأتي، ثمَّ أعبِّرُ عنها باستعمالِ رمزِ الفترةِ:

22)

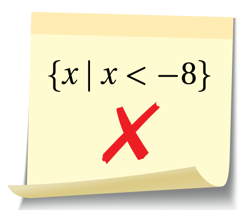


23)



مهاراتُ التفكيرِ العُليا

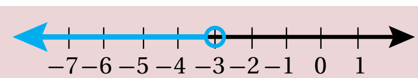
24) أكتشفُ الخطأَ: أعادَ أحمدُ كتابةَ الفترةِ $(-\infty, -8]$ باستعمالِ الصِّفةِ المُميِّزةِ، كما هُوَ مبيَّنٌ أدناهُ:



أُبيِّنُ الخطأَ الّذي وقعَ فيهِ أحمدُ، وأصحّحُهُ.

25) تَحَدٍّ: أكتبُ المجموعةَ $D = \left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{5}, \frac{3}{10}, \frac{4}{17}, \frac{5}{26}, \frac{6}{37}, \frac{7}{50}\right\}$ باستعمالِ الصِّفةِ المُميِّزةِ.

26) أكتشفُ المُختلِفَ: أيٌّ ممّا يأتي مختلفٌ؟ أبرّرُ إجابتي:



$x < -3$

$\{ \ldots, -5, -4, -3\}$

$\{x \mid x < -3\}$

الدرس 2

حلُّ المُتبايناتِ المُركَّبةِ
Solving Compound Inequalities

فكرةُ الدرسِ
- حلُّ مُتبايناتٍ مُركَّبةٍ تحتوي على أداةِ الرَّبطِ (و) أَوْ (أو)، وتمثيلُ مجموعةِ حَلِّها على خطِّ الأعدادِ.
- التعبيرُ عَنِ المُتبايناتِ المُركَّبةِ باستعمالِ الفتراتِ.

المصطلحاتُ مُتباينةٌ بسيطةٌ، مُتباينةٌ مُركَّبةٌ، تقاطعٌ، اتِّحادٌ، فترةٌ محدودةٌ.

مسألةُ اليومِ تُعَدُّ سمكةُ (النيون تيترا) مِنْ أكثرِ أسماكِ الزينةِ شُهرَةً، وتعيشُ في مياهٍ عذبةٍ تتراوحُ درجةُ حرارَتِها من 20°C إلى 26°C. أكتبُ مُتباينةً تمثِّلُ درجاتِ الحرارةِ الملائمةَ للسمكةِ.

المُتباينةُ المُركَّبةُ

تُسَمّى المُتبايناتُ الَّتي تعلَّمتُها سابقًا **مُتبايناتٍ بسيطةً** (simple inequalities)؛ لأنَّها تحتوي على رمزِ مُتباينةٍ واحدٍ.

المُتباينةُ المُركَّبةُ (compound inequality): هِيَ عبارةٌ ناتجةٌ عَنْ ربطِ مُتباينتَينِ باستعمالِ أداةِ الرَّبطِ (و) أَوْ مرادفِها باللُّغةِ الإنجليزيَّةِ (and) أَوْ باستعمالِ أداةِ الرَّبطِ (أو) أَوْ مرادفِها باللُّغةِ الإنجليزيَّةِ (or).

مُتبايناتٌ مُركَّبةٌ	مُتباينةٌ بسيطةٌ
$x \geq 1$ and $x \leq 4$	$x \geq 5$
$x < 0$ or $x \geq 3$	

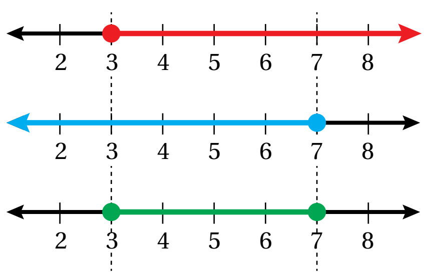
التمثيلُ البيانيُّ للمُتباينةِ المُركَّبةِ الَّتي تحتوي على أداةِ الرَّبطِ (و) هُوَ **تقاطعُ** (intersection) التمثيلَينِ البيانيَّينِ للمُتباينتَينِ المُكوِّنتَينِ للمُتباينةِ المُركَّبةِ.

$x \geq 3$

$x \leq 7$

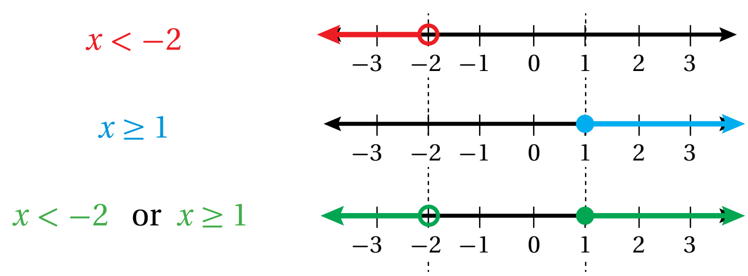
$x \geq 3$ and $x \leq 7$

$3 \leq x \leq 7$



أتعلّمُ
يمكنُ التعبيرُ عنْ تقاطعِ المتباينةِ $x \geq 3$ والمتباينةِ $x \leq 7$ بطريقتَينِ؛ الأولى هيَ: $x \geq 3$ and $x \leq 7$، والثانيةُ هيَ: $3 \leq x \leq 7$

التمثيلُ البيانيُّ للمُتبايِنةِ المُركَّبةِ الّتي تحتوي على أداةِ الرَّبطِ (أو) هُوَ **اتحادُ** (union) التمثيلَينِ البيانيَّينِ للمُتباينتَينِ المُكوِّنتَينِ للمُتبايِنةِ المُركَّبةِ.



مثال 1

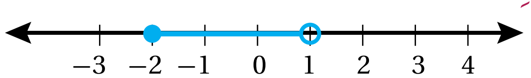
أكتبُ مُتبايِنةً مُركَّبةً تمثّلُ كلَّ جملةٍ ممّا يأتي، ثمَّ أمثّلُها على خطِّ الأعدادِ:

1 **عددٌ أكبرُ مِنْ أوْ يُساوي 2− وأقلُّ مِنْ 1**

أختارُ مُتغيِّرًا: لِيَكُنْ x ممثِّلًا للعددِ.

أكتبُ المُتبايِنةَ: $-2 \leq x < 1$

أمثّلُ على خطِّ الأعدادِ:

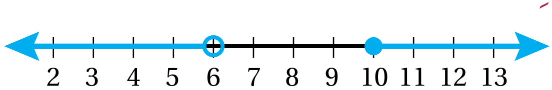


2 **عددٌ أقلُّ مِنْ 6 أوْ لا يقلُّ عَنْ 10**

أختارُ مُتغيِّرًا: لِيَكُنْ y ممثِّلًا للعددِ.

أكتبُ المُتبايِنةَ: $y < 6$ or $y \geq 10$

أمثّلُ على خطِّ الأعدادِ:



أتحقَّقُ من فهمي

أكتبُ مُتبايِنةً مركّبةً تمثّلُ كلَّ جملةٍ ممّا يأتي، ثمَّ أمثّلُها على خطِّ الأعدادِ:

a) عددٌ أكبرُ مِنْ 3− وأقلُّ مِنْ 7

b) عددٌ على الأكثرِ 0 أوْ على الأقلِّ 2

أتذكَّرُ

تُشيرُ عبارةُ "على الأكثرِ" إلى الرَّمزِ ≤، أمّا عبارةُ "على الأقلِّ" فتشيرُ إلى الرَّمزِ ≥

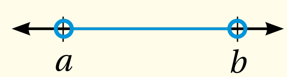
المُتبايناتُ المُركَّبةُ والفتراتُ

تعلَّمتُ في الدرسِ السابقِ كيفيَّةَ التعبيرِ عَنِ المُتباينةِ البسيطةِ باستعمالِ رمزِ الفترةِ، ويمكنُ أيضًا التعبيرُ عَنِ المُتباينةِ المُركَّبةِ باستعمالِ رمزِ الفترةِ.

يمكنُ التعبيرُ عنْ بعضِ المُتبايناتِ المُركَّبةِ الَّتي تحتوي على أداةِ الرَّبطِ (و) باستعمالِ **فترةٍ محدودةٍ** (bounded interval)، وهيَ فترةٌ لا يمتدُّ أيٌّ مِنْ طرفَيها إلى المالانهايةِ، وفي ما يأتي أشكالُ الفتراتِ المحدودةِ المختلفةِ الَّتي تُعبِّرُ عَنِ المُتبايناتِ المُركَّبةِ:

مفهومٌ أساسيٌّ **الفتراتُ المحدودةُ**

إذا كانَ a وَ b عددينِ حقيقيّينِ؛ حيثُ $a < b$، فيمكنُ التعبيرُ عَنْ كلٍّ مِنَ المُتبايناتِ المُركَّبةِ الآتيةِ باستعمالِ فترةٍ محدودةٍ:

التمثيلُ على خطِّ الأعدادِ	رَمزُ الفترةِ	المُتباينةُ
	$[a, b]$	$a \le x \le b$
	(a, b)	$a < x < b$
	$[a, b)$	$a \le x < b$
	$(a, b]$	$a < x \le b$

أمّا إذا احتوتِ المُتباينةُ المُركَّبةُ على أداةِ الرَّبطِ (أو)، فيمكنُ التعبيرُ عَنْ كلٍّ مِنَ المُتباينتَينِ المُكوِّنتَينِ لها، ثمَّ الرَّبطُ بينَ الفترتَيْنِ باستعمالِ رمزِ الاتحادِ $\cup$.

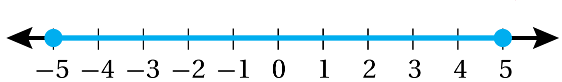
مثال 2

أكتبُ كلَّ مُتباينةٍ مُركَّبةٍ ممّا يأتي باستعمالِ رمزِ الفترةِ، ثمَّ أمثِّلُها على خطِّ الأعدادِ:

1 $-5 \le x \le 5$

رمزُ الفترةِ: $[-5, 5]$

التمثيلُ على خطِّ الأعدادِ:



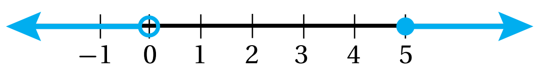
أتعلَّمُ

$(-\infty, 0) \cup [5, \infty)$ ليســتْ فترةً، وإنّما اتحادُ الفترتَيــنِ المنفصلتَيــنِ $(-\infty, 0)$ و $[5, \infty)$

2 $x < 0$ or $x \geq 5$

اتحادُ فترتَينِ منفصلتَينِ: $(-\infty, 0) \cup [5, \infty)$

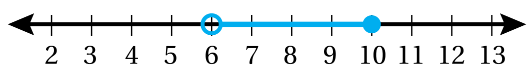
التمثيلُ على خطِّ الأعدادِ:



3 $6 < x \leq 10$

رمزُ الفترةِ: $(6, 10]$

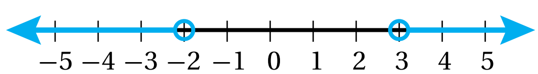
التمثيلُ على خطِّ الأعدادِ:



4 $x < -2$ or $x > 3$

اتحادُ فترتَينِ منفصلتَينِ: $(-\infty, -2) \cup (3, \infty)$

التمثيلُ على خطِّ الأعدادِ:



أتحقَّقُ مِنْ فهمي

أكتبُ كلَّ مُتباينةٍ مُركَّبةٍ ممّا يأتي باستعمالِ رمزِ الفترةِ، ثمَّ أمثّلُها على خطِّ الأعدادِ:

a) $-10 < x \leq 10$

b) $x > 1$ or $x < -4$

c) $7 \leq x < 12$

d) $x \leq -8$ or $x \geq 8$

حلُّ المُتبايناتِ المُركَّبةِ

تعلَّمتُ ســابقًا حلَّ المُتبايناتِ البسيطةِ باستعمالِ خصائصِ جمعِ المُتبايناتِ وطرحِها وضربِها وَقِسمَتِها، ويمكنُ تطبيقُ الخصائصِ ذاتِها لحلِّ المُتبايناتِ المُركَّبةِ الَّتي تحتوي على أداةِ الرَّبطِ (و).

أتعلَّمُ

مجموعةُ حلِّ المُتباينةِ المُركَّبةِ الَّتي تحتوي على أداةِ الرَّبطِ (و)، هِيَ مجموعةُ الأعدادِ الَّتي تحقِّقُ المُتباينتَينِ المُكوِّنتَينِ للمُتباينةِ المُركَّبةِ معًا. فمثلًا، $1 < x \le 4$ هِيَ مجموعةُ الأعدادِ الَّتي تحقِّقُ المُتباينتَينِ $x > 1$ و $x \le 4$ معًا.

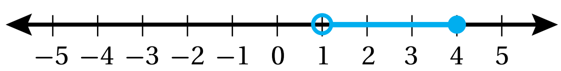
مثال 3

أَجِدُ مجموعةَ حلِّ كلِّ مُتباينةٍ ممّا يأتي، ثمَّ أمثّلُها على خطِّ الأعدادِ:

1 $-4 < x - 5 \le -1$

$-4 < x - 5 \le -1$	المُتباينةُ المُعطاةُ
$-4 + 5 < x - 5 + 5 \le -1 + 5$	بإضافةِ 5 إلى كلِّ طَرَفٍ
$1 < x \le 4$	بالتبسيطِ

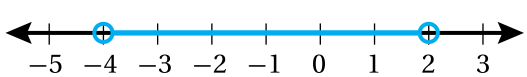
إذنْ، مجموعةُ الحلِّ هيَ: $\{x \mid 1 < x \le 4\}$، ويمكنُ كتابتُها باستعمالِ رمزِ الفترةِ على الصورةِ: $(1, 4]$، ويمكنُ تمثيلُها على خطِّ الأعدادِ علَى النَّحوِ الآتي:



2 $-3 < -2x + 1 < 9$

$-3 < -2x + 1 < 9$	المُتباينةُ المُعطاةُ
$-3 - 1 < -2x + 1 - 1 < 9 - 1$	بطرحِ 1 مِنْ كلِّ طَرَفٍ
$-4 < -2x < 8$	بالتبسيطِ
$\frac{-4}{-2} > \frac{-2x}{-2} > \frac{8}{-2}$	بِقِسمَةِ كلِّ طَرَفٍ على -2 ، وتغييرِ اتّجاهِ رمزِ المُتباينةِ
$2 > x > -4$	بالتبسيطِ
$-4 < x < 2$	بإعادةِ كتابةِ المُتباينةِ

إذنْ، مجموعةُ الحلِّ هيَ: $\{x \mid -4 < x < 2\}$، ويمكنُ كتابتُها باستعمالِ رمزِ الفترةِ على الصورةِ: $(-4, 2)$، ويمكنُ تمثيلُها على خطِّ الأعدادِ على النَّحوِ الآتي:



أتحقَّقُ مِنْ فهمي

أَجِدُ مجموعةَ حلِّ كلِّ مُتباينةٍ ممّا يأتي، ثمَّ أمثّلُها على خطِّ الأعدادِ:

a) $-5 < x - 4 < 2$

b) $-2 < -3x - 8 \le 10$

يمكنُ أيضًا حلُّ المُتبايناتِ المُركَّبةِ الَّتي تحتوي على أداةِ الرَّبطِ (أو) باستعمالِ خصائصِ المُتبايناتِ.

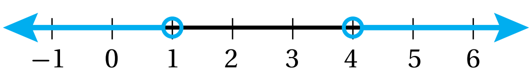
مثال 4

أَجِدُ مجموعةَ حلِّ كلِّ مُتبايِنةٍ ممّا يأتي، ثمَّ أمثّلُها على خطِّ الأعدادِ:

1 $2x + 3 < 5 \text{ or } x + 7 > 11$

المُتباينةُ المُعطاةُ	$x + 7 > 11$	or	$2x + 3 < 5$
بالطرحِ	$x + 7 - 7 > 11 - 7$		$2x + 3 - 3 < 5 - 3$
بالتبسيطِ	$x > 4$		$2x < 2$
بالقِسمَةِ			$\frac{2x}{2} < \frac{2}{2}$
بالتبسيطِ	$x > 4$	or	$x < 1$

إذنْ، مجموعةُ الحلِّ هيَ $\{x \mid x < 1 \text{ or } x > 4\}$، ويمكنُ كتابتُها باستعمالِ اتحادِ فترتَينِ منفصلتَينِ على الصورةِ: $(-\infty, 1)\cup(4, \infty)$، ويمكنُ تمثيلُها على خطِّ الأعدادِ على النَّحوِ الآتي:

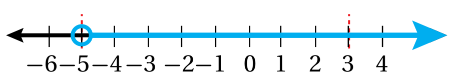


2 $-3x + 4 < 19 \text{ or } 7x - 3 > 18$

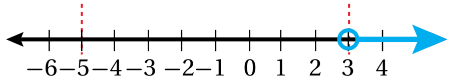
المُتباينةُ المُعطاةُ	$7x - 3 > 18$	or	$-3x + 4 < 19$
بالطرحِ أوِ الجمعِ	$7x - 3 + 3 > 18 + 3$		$-3x + 4 - 4 < 19 - 4$
بالتبسيطِ	$7x > 21$		$-3x < 15$
بالقِسمَةِ	$\frac{7x}{7} > \frac{21}{7}$		$\frac{-3x}{-3} > \frac{15}{-3}$
بالتبسيطِ	$x > 3$	or	$x > -5$

مجموعةُ حلِّ المُتباينةِ هِيَ اتّحادُ المُتباينتَينِ. إذنْ، أمثّلُ كُلًّا مِنَ المُتباينتَينِ الآتيتَينِ، ثمَّ أَجِدُ اتّحادَ التمثيلَينِ:

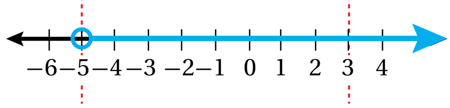
$x > -5$



$x > 3$



اتّحادُ المُتباينتَينِ



أتعلَّم

تكونُ المُتباينةُ المُركَّبةُ الَّتي تحتوي على أداةِ الرَّبطِ (و) صحيحةً إذا كانتِ المُتباينتانِ المُكوِّنتانِ لها صحيحتَيْنِ، أمّا المُتباينةُ المُركَّبةُ الَّتي تحتوي على أداةِ الرَّبطِ (أو) فتكونُ صحيحةً إذا كانتْ إحدى المُتباينتَينِ المُكوِّنتَينِ لها على الأقلِّ صحيحةً.

أتعلَّم

عندَ إيجادِ مجموعةِ حلِّ مُتباينةٍ مُركَّبةٍ تحتوي على أداةِ الرَّبطِ (أو)، يُفَضَّلُ تمثيلُ كلِّ مُتباينةٍ على حِدَةٍ، ثمَّ إيجادُ اتِّحادِ التمثيلَيْنِ البيانيَّيْنِ، لا سِيَّما عندَ تغييرِ اتِّجاهِ رمزِ المُتباينةِ، أوْ إذا كانَ للمُتباينتَيْنِ الأصليَّتَيْنِ الاتِّجاهُ نفسُهُ.

ألاحـظُ أنَّ التمثيلَ البيانيَّ للمُتباينةِ $x > -5$ يحتوي على جميعِ نقاطِ التمثيلِ البيانيِّ للمُتباينةِ $x > 3$؛ لِذا يكـونُ الاتِّحادُ هُوَ التمثيـلُ البيانيُّ للمُتباينةِ $x > -5$، وتكـونُ مجموعةُ الحلِّ $\{x \mid x > -5\}$، ويمكنُ كتابتُها باستعمالِ رمزِ الفترةِ على الصورةِ: $(-5, \infty)$.

أتحقَّقُ مِنْ فهمي

أَجِدُ مجموعةَ حلِّ كلِّ مُتباينةٍ ممّا يأتي، ثمَّ أمثّلُها على خطِّ الأعدادِ:

a) $x + 2 \leq 5$ or $x - 4 \geq 2$

b) $-2x + 7 \leq 13$ or $5x + 12 < 37$

يمكنُ استعمالُ المُتبايناتِ لحلِّ كثيرٍ مِنَ التطبيقاتِ الحياتيَّةِ.

معلومةٌ

يتكوّنُ نظامُ تبريدِ مُحرِّكِ السّيّارةِ من مِضَخَّةٍ تدفعُ الماءَ ذهابًا وإيابًا بينَ المُحَرِّكِ والمشعِّ (الرديتر)، الذي يظهرُ في الصورةِ أعلاهُ.

مثال 5 : مِنَ الحياةِ

درجةُ الحرارةِ: تتراوحُ درجةُ حرارةِ مُحَرِّكِ سيّارةٍ في أثناءِ تشغيلِهِ من $90°C$ إلى $110°C$. أكتبُ مُتباينةً مُركَّبةً تمثِّلُ درجةَ حرارةِ مُحَرِّكِ السيّارةِ في أثناءِ تشغيلِهِ وأمثِّلُها على خطِّ الأعدادِ، ثمَّ أحوِّلُ المُتباينةَ إلى الدرجةِ الفهرنهايتيَّةِ. علمًا أنَّ $°C = \frac{5}{9}(°F-32)$

أختارُ مُتغيِّرًا: لِيَكُنْ C ممثّلًا لدرجةِ حرارةِ المُحَرِّكِ بالسلسيوس.

أكتبُ المُتباينةَ: $90 \leq C \leq 110$

أمثّلُ على خطِّ الأعدادِ:

لِيَكُنْ F ممثّلًا لدرجةِ الحرارةِ بالفهرنهايت، وَمِنْهُ:

$90 \leq C \leq 110$	المُتباينةُ
$90 \leq \frac{5}{9}(F-32) \leq 110$	بالتعويضِ عن C بـ $\frac{5}{9}(F-32)$
$162 \leq F - 32 \leq 198$	بضربِ كلِّ طَرَفٍ بـ $\frac{9}{5}$
$194 \leq F \leq 230$	بجمعِ 32 لكلِّ طَرَفٍ

إذنْ، تتراوحُ درجةُ حرارةِ المُحَرِّكِ في أثناءِ التشغيلِ من $194°F$ إلى $230°F$

أتحقَّقُ مِنْ فهمي

درجةُ الحرارة: إذا عَلِمتُ أنَّ درجةَ حرارةِ الجسمِ الطبيعيَّةَ للأشخاصِ البالغينَ تتراوحُ من $36.1°C$ إلى $37.2°C$، فأكتبُ مُتباينةً مُركَّبةً تمثِّلُ درجةَ حرارةِ الشخصِ البالغِ وأمثِّلُها على خطِّ الأعدادِ، ثمَّ أحوِّلُ المُتباينةَ إلى الدرجةِ الفهرنهايتيَّةِ. علمًا أنَّ $°C = \frac{5}{9}(°F - 32)$

أتدرَّبُ وأحُلُّ المسائلَ

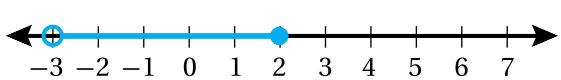
أكتبُ مُتباينةً مُركَّبةً تمثِّلُ كلَّ جملةٍ ممّا يأتي، ثمَّ أمثِّلُها على خطِّ الأعدادِ:

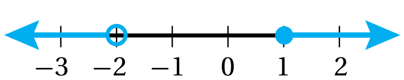
1. عددٌ أكبرُ مِنْ -7 وأقلُّ مِنْ 2
2. عددٌ أقلُّ مِنْ أوْ يُساوي -5 أوْ أكبرُ مِنْ 12
3. عددٌ يقلُّ عن 10 ويزيدُ على -10
4. عددٌ علَى الأكثرِ -2 أوْ على الأقلِّ 9
5. ناتجُ ضربِ عددٍ في -5 أكبرُ مِنْ 35 أوْ أقلُّ مِنْ 10
6. عددٌ مطروحٌ مِنْهُ 8 لا يزيدُ على 4 ولا يقلُّ عَنْ 5

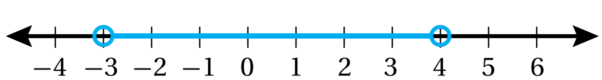
أكتبُ كلَّ مُتباينةٍ مُركَّبةٍ ممّا يأتي باستعمالِ رمزِ الفترةِ، ثمَّ أمثِّلُها على خطِّ الأعدادِ:

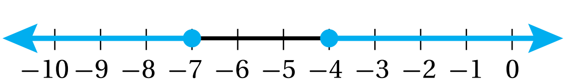
7. $x \geq 4$ or $x \leq -7$
8. $-2 < x < 4$
9. $x < 2$ or $x \geq 15$
10. $-5 \leq x \leq 10$

أكتبُ مُتباينةً مُركَّبةً تعبِّرُ عَنْ كلِّ تمثيلٍ على خطِّ الأعدادِ ممّا يأتي، ثمَّ أعبِّرُ عنها برمزِ الفترةِ:

11. 

12. 

13. 

14. 

أَجِدُ مجموعةَ حلِّ كلِّ مُتباينةٍ ممّا يأتي، ثمَّ أُمثِّلُها على خطِّ الأعدادِ:

15 $-5 < x + 1 < 4$

16 $\frac{1}{2} < \frac{3x - 1}{4} \le 5$

17 $-9 < 3x + 6 \le 18$

18 $x + 1 < -3$ or $x - 2 > 0$

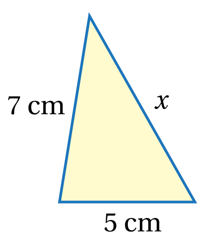
19 $2r + 3 < 7$ or $-r + 9 \le 2$

20 $2n + 11 \le 13$ or $-3n \ge -12$

21 **سُعراتٌ حراريَّةٌ:** إذا عَلِمتُ أنَّ حاجةَ الرياضيِّ مِنَ الطاقةِ تعتمدُ على عواملَ عِدَّةٍ، مِنْ أهمِّها كتلتُهُ وسرعةُ التمرينِ، وكانَ رياضيٌّ يحتاجُ يوميًّا من 3000 إلى 4500 سعرةٍ حراريَّةٍ، فأكتبُ مُتباينةً تمثِّلُ السُّعراتِ الحراريَّةَ الَّتي يحتاجُ إليها الرياضيُّ، وأمثِّلُها على خطِّ الأعدادِ.

مهاراتُ التفكيرِ العُليا

تبريرٌ: إذا كانَ مجموعُ طولَي أيِّ ضلعَيْنِ في المثلّثِ أكبرَ مِنْ طولِ الضِّلعِ الثالثِ، فأستعمِلُ هذه الحقيقةَ للإجابةِ عَنِ السؤالَينِ الآتيَينِ تباعًا:



22 هلْ يمكنُ أنْ تكونَ قيمةُ x في المثلّثِ المُجاوِرِ 1 cm؟ أبرِّرُ إجابتي.

23 أستعمِلُ المثلّثَ المُجاورَ لكتابةِ مُتباينةٍ تحدّدُ قِيَمَ x المُمكِنَةَ، وأبرّرُ إجابتي.

24 **أكتشفُ الخطأَ:** ناتجُ تقريبِ العددِ x إلى أقربِ 100 هُوَ 400. تقولُ عبيرُ إنَّ المُتباينةَ $395 \le x < 405$ تعبّرُ عَنْ جميعِ قِيَمِ x المُحتمَلةِ، وتقولُ لمياءُ إنَّ المُتباينةَ $350 \le x < 450$ تعبّرُ عَنْ جميعِ قِيَمِ x المُحتمَلةِ. أيُّهُما إجابتُها صحيحةٌ؟ أبرّرُ إجابتي.

تبريرٌ: أَجِدُ مجموعةَ حلِّ كلِّ مُتباينةٍ ممّا يأتي، وأبرّرُ إجابتي:

25 $-1 + x < 3$ or $-x \ge -4$

26 $3x - 7 \ge 5$ and $2x + 6 \le 12$

الدرس 3

تمثيلُ المُتبايناتِ الخطيَّةِ بمُتغيِّرَينِ بيانيًّا

Graphing Linear Inequalities in Two Variables

فكرةُ الدرسِ تمثيلُ مُتباينةٍ خطيَّةٍ بمُتغيِّرَينِ بيانيًّا.

المصطلحاتُ المُتباينةُ الخطيَّةُ بمُتغيِّرَينِ، منطقةُ الحلولِ الممكنةِ، المُستقيمُ الحُدوديُّ.

مسألةُ اليومِ تعملُ شركةٌ على تجميعِ نوعَينِ مختلفَينِ مِنْ أجهزةِ المايكروويف. إذا كانَ تجميعُ الجهازِ الواحدِ مِنَ النَّوعِ الأوَّلِ يحتاجُ إلى ساعتَينِ، وتجميعُ الجهازِ الواحدِ مِنَ النَّوعِ الثاني يحتاجُ إلى 1.5 ساعةٍ، وكانَ الحدُّ الأقصى لعددِ ساعاتِ العملِ أُسبوعيًّا 80 ساعةً، فأكتبُ مُتباينةً خطيَّةً بمُتغيِّرَينِ تمثِّلُ عددَ أجهزةِ المايكروويف الَّتي يمكنُ للشركةِ تجميعُها أُسبوعيًّا مِنْ كلِّ نوعٍ.

المُتبايناتُ الخطيَّةُ بمُتغيِّرَينِ

المُتباينةُ الخطيَّةُ بمُتغيِّرَينِ (linear inequality in two variables) هِيَ مُتباينةٌ يمكنُ كتابتُها على إحدى الصُّوَرِ الآتيةِ:

$ax + by < c$ $\quad ax + by \leq c$ $\quad ax + by > c$ $\quad ax + by \geq c$

حيثُ a, b, c أعدادٌ حقيقيَّةٌ، و a و b لا يُساويانِ صفرًا، وَحَلُّ المُتباينةِ الخطيَّةِ بمُتغيِّرَينِ هُوَ مجموعةُ جميعِ الأزواجِ المُرَتَّبَةِ (x, y)، التي تجعلُ المُتباينةَ صحيحةً عندَ تعويضِ إحداثيّاتِها في المُتباينةِ.

أتعلَّم

لكلِّ مُتباينةٍ خطيَّةٍ مُعادلةٌ خطيَّةٌ مُرتبطةٌ بها. فمثلًا، $x + 2y > 1$ هِيَ مُتباينةٌ خطيَّةٌ، وَ $x + 2y = 1$ هِيَ المُعادلةُ الخطيَّةُ المُرتبطةُ بها.

مثال 1

أُحَدِّدُ إذا كانَ كلُّ زوجٍ مُرَتَّبٍ ممّا يأتي يمثِّلُ حَلًّا للمُتباينةِ $3x + y < 7$:

1 $(-3, 1)$

أعوّضُ الزَّوجَ المُرَتَّبَ $(-3, 1)$ في المُتباينةِ:

$3x + y < 7$	المُتباينةُ المُعطاةُ
$3(-3) + 1 \overset{?}{<} 7$	بتعويضِ $x = -3, y = 1$
$-8 < 7$ ✓	الناتجُ صحيحٌ

أُلاحِظُ عندَ تعويضِ الزَّوجِ المُرَتَّبِ في المُتباينةِ أنَّ الناتجَ يكونُ صحيحًا.

إذنْ، الزَّوجُ المُرَتَّبُ $(-3, 1)$ هُوَ أحَدُ الحُلولِ المُمكِنةِ للمُتباينةِ.

2 **(2, 4)**

أعوّضُ الزَّوجَ المُرَتَّبَ $(2, 4)$ في المُتباينةِ:

المُتباينةُ المُعطاةُ	$3x + y < 7$
بتعويضِ $x = 2, y = 4$	$3(2) + 4 \overset{?}{<} 7$
الناتجُ غيرُ صحيحٍ	$10 < 7$ ✗

أُلاحِظُ عندَ تعويضِ الزَّوجِ المُرَتَّبِ في المُتباينةِ أنَّ الناتجَ لا يكونُ صحيحًا.

إذنْ، الزَّوجُ المُرَتَّبُ $(2, 4)$ ليسَ أحدَ الحُلولِ المُمكِنةِ للمُتبايِنةِ.

3 **(0, 2)**

أعوّضُ الزَّوجَ المُرَتَّبَ $(0, 2)$ في المُتباينةِ:

المُتباينةُ المُعطاةُ	$3x + y < 7$
بتعويضِ $x = 0, y = 2$	$3(0) + 2 \overset{?}{<} 7$
الناتجُ صحيحٌ	$2 < 7$ ✓

أُلاحِظُ عندَ تعويضِ الزَّوجِ المُرَتَّبِ في المُتباينةِ أنَّ الناتجَ يكونُ صحيحًا.

إذنْ، الزَّوجُ المُرَتَّبُ $(0, 2)$ هُوَ أحَدُ الحُلولِ المُمكِنةِ للمُتبايِنةِ.

أتحقَّقُ مِنْ فهمي

أحدّدُ ما إذا كانَ كلُّ زوجٍ مُرَتَّبٍ ممّا يأتي يمثِّلُ حَلًّا للمُتباينةِ $-2x + 3y \geq 3$:

a) $(4, 1)$ **b)** $(-1, 2)$ **c)** $(0, 1)$

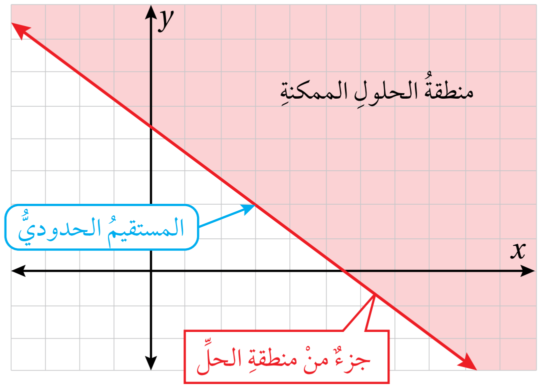
تمثيلُ المُتباينات الخطيّة بِمُتغيّرَين بيانيًّا

أُلاحِظُ مِنَ المثالِ السابقِ أنَّ مجموعةَ حَلِّ المُتباينةِ الخطيَّةِ بمُتغيِّرينِ تتكوَّنُ مِنَ عدّةِ أزواجٍ مرتَّبةٍ تحقِّقُ المُتباينةَ، وعندَ تمثيلِ المُتباينةِ الخطيَّةِ بمُتغيِّرينِ بيانيًّا في المُستوى الإحداثيِّ، فإنَّ النقاطَ الَّتي تمثّلُ جميعَ حُلولِها المُمكِنَةِ تُسَمّى **منطقةَ الحُلولِ المُمكِنةِ** (feasible region)، ويُسَمّى المُستقيمُ الَّذي يُقَسِّمُ المُستوى الإحداثيَّ إلى جُزأينِ، أحدُهما منطقةُ الحُلولِ المُمكِنةِ، **المُستقيمَ الحُدوديَّ** (boundary line).

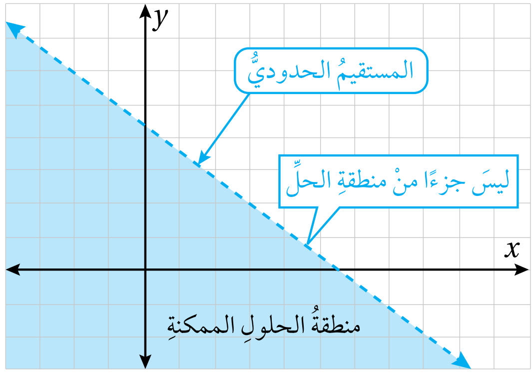
أتعلَّمُ

يُقسِّم المستقيمُ الحدوديُّ للمُتباينةِ المستوى الإحداثيَّ قسمَيْنِ؛ أحدُهُما منطقةُ الحُلولِ المُمكِنَةِ.

وَقَد يكونُ المُستقيم الحُدوديُّ جُزءًا مِنْ منطقةِ الحُلولِ المُمكِنةِ إذا تضمَّنَتِ المُتباينةُ الرَّمزَ $\leq$ أوِ الرَّمزَ $\geq$، وعندئذٍ يُرسَمُ المُستقيم الحُدوديُّ متّصِلًا.



وَقَد لا يكونُ المُستقيم الحُدوديُّ جُزءًا مِنْ منطقةِ الحُلولِ المُمكِنةِ إذا تضمَّنَتِ المُتباينةُ الرَّمزَ $<$ أوِ الرَّمزَ $>$، عندئذٍ يُرسَمُ المُستقيم الحُدوديُّ متقطِّعًا.



مفهومٌ أساسيٌّ

تمثيلُ المُتبايناتِ الخطيَّةِ بمُتغيِّرَين بيانيًّا

لتمثيلِ المُتبايناتِ الخطيَّةِ بمُتغيِّرَينِ بيانيًّا، أتَّبِعُ الخُطواتِ الآتيةَ:

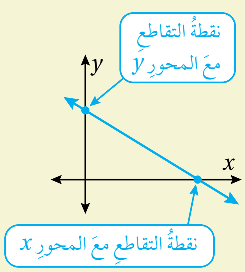
الخُطوةُ 1: أرسُمُ مُنحَنى المُعادلةِ المُرافقةِ للمُتباينةِ بأنْ أستخدمَ رمزَ المُساواةِ (=) بدلًا منَ الرَّمزِ (≤، ≥، >، <)؛ حيثُ تمثِّلُ المُعادلةُ الناتجةُ المُستقيمَ الحُدوديَّ.

الخُطوةُ 2: أختارُ نقطةً لا تقعُ على المستقيمِ الحُدوديِّ، ثمَّ أعوِّضُها في المُتباينةِ الخطيَّةِ لتحديدِ ما إذا كانتْ تمثِّلُ حَلًّا للمُتباينةِ أمْ لا.

الخُطوةُ 3: إذا كانتِ النقطةُ تحقِّقُ المُتباينةَ؛ أيْ تنجُمُ عنها نتيجةٌ صحيحةٌ، فأظلِّلُ الجُزءَ مِنَ المُستوى الإحداثيِّ الَّذي تقعَ فيهِ تلكَ النقطةُ، وإذا لَمْ تكنْ كذلكَ فأظلِّلُ الجُزءَ الآخَرَ الَّذي لا تقعُ فيهِ تلكَ النقطةُ.

أتذكَّرُ

بما أنَّهُ يمكنُ تمثيلُ المُستقيمِ بنُقطتَينِ، فإنَّ أسهلَ طريقةٍ لتمثيلِ المُعادلةِ الخطيَّةِ هيَ إيجادُ نُقطتَيْ تقاطعِ المُستقيمِ مَعَ المِحورَينِ الإحداثيَّينِ، إنْ أمكَنَ.



مثال 2

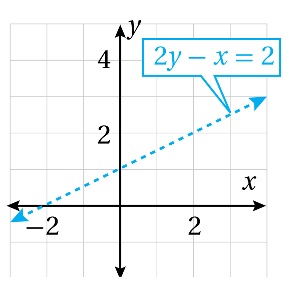
أمثِّلُ المُتباينةَ الخطيَّةَ $2y - x < 2$ في المُستوى الإحداثيِّ.

الخُطوةُ 1: أمثِّلُ المُستقيمَ الحُدوديَّ.

أمثِّلُ المُستقيمَ الحُدوديَّ $2y - x = 2$، وأُنشئُ جدولَ قِيَمٍ يبيِّنُ نقاطَ تقاطعِ المُستقيمِ مَعَ المِحورَينِ.

x	0	-2
y	1	0

أعيِّنُ النقطتَيْنِ $(0, 1)$ وَ $(-2, 0)$ في المُستوى الإحداثيِّ، ثمَّ أرسُمُ مُستقيمًا يَمُرُّ بِهِما. وَبِما أنَّهُ لا توجدُ مُساواةٌ في رَمزِ المُتباينةِ، فَيُرسَمُ المستقيمُ الحدوديُّ متقطِّعًا، كما في الشَّكلِ الآتي:



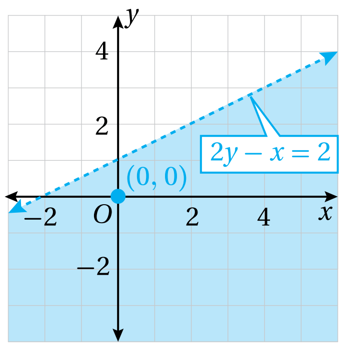
الخطوةُ 2: أحدّدُ منطقةَ الحُلولِ المُمكِنةِ.

أختارُ نقطةً لا تقعُ على المُستقيمِ الحُدوديِّ، مثلَ $(0, 0)$، ثمَّ أتحقّقُ إذا كانَ الناتجُ صحيحًا أمْ لا عندَ تعويضِها في المُتباينةِ:

المُتباينةُ الخطيَّةُ	$2y - x < 2$
بتعويضِ $x = 0, y = 0$	$2(0) - 0 \overset{?}{<} 2$
الناتجُ صحيحٌ	$0 < 2$ ✓

الخطوةُ 3: أظلّلُ منطقةَ الحُلولِ المُمكِنةِ.

بِما أنَّ النقطةَ $(0, 0)$ هِيَ إحدى الحُلولِ المُمكِنَةِ للمُتباينةِ، فأظلّلُ الجُزءَ مِنَ المُستوى الَّذي تقعُ فيهِ هذهِ النقطةُ، كما في الشَّكلِ الآتي:



أتحقَّقُ مِنْ فهمي

أمثّلُ المُتباينةَ الخطيَّةَ $-x + 2y > 2$ في المُستوى الإحداثيِّ.

أتعلَّمُ

لسهولةِ إجراءِ الحساباتِ، يُفَضَّلُ اختيارُ النقطةِ $(0, 0)$ لفحصِ المُتباينةِ. ولكنْ، إذا وقعتْ على المُستقيمِ الحُدوديِّ فيجبُ اختيارُ نقطةٍ غيرِها.

مثال 3

أمثّلُ المُتباينةَ الخطيَّةَ $y \geq 2x$ في المُستوى الإحداثيِّ.

الخطوةُ 1: أمثّلُ المُستقيمَ الحُدوديَّ.

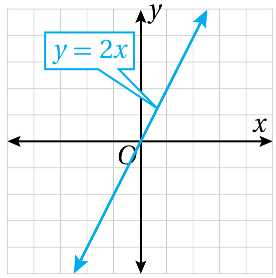
أمثّلُ المُستقيمَ الحُدوديَّ $y = 2x$، وأُنشئُ جدولَ قِيَمٍ، وذلكَ باختيارِ قِيَمٍ للمُتغيّرِ x وتعويضِها في المعادلةِ لإيجادِ قِيَمِ المُتغيّرِ y المقابِلَةِ لها.

x	0	1
y	0	2

أفكّرُ

هل يمكنُ تمثيلُ المُستقيمِ $y = 2x$ باستعمالِ نُقطتَيْ تقاطعِ المُستقيمِ مَعَ المِحورَيْنِ الإحداثيَّيْنِ؟ أبرّرُ إجابتي.

أعيّنُ النقطتَيْنِ $(0, 0)$ وَ $(1, 2)$ في المُســتوى الإحداثيِّ، ثمَّ أرسمُ مُستقيمًا يَمُرُّ بِهما. وَبِما أنَّهُ توجدُ مُساواةٌ في رَمزِ المُتباينةِ فَيُرسَمُ المُستقيمُ الحدوديُّ متّصِلًا، كما في الشَّكلِ الآتي:



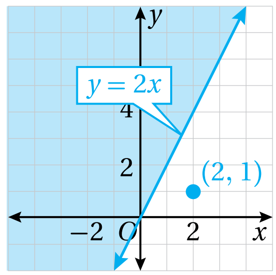
الخطوةُ 2: أحدّدُ منطقةَ الحُلولِ المُمكِنةِ.

أختارُ نقطةً لا تقعُ على المُستقيمِ الحُدوديِّ، مثلَ $(2, 1)$، ثمَّ أتحقّقُ إذا كانَ الناتجُ صحيحًا أمْ لا عندَ تعويضِها في المُتباينةِ:

المُتباينةُ الخطيَّةُ	$y \geq 2x$
بتعويضِ $x = 2, y = 1$	$1 \overset{?}{\geq} 2(2)$
الناتجُ غيرُ صحيحٍ	$1 \geq 4$ ✗

الخطوةُ 3: أظلّلُ منطقةَ الحُلولِ المُمكِنةِ.

بِما أنَّ النقطةَ $(2, 1)$ ليستْ إحدى الحُلولِ المُمكِنةِ للمُتباينةِ، فأظلّلُ الجُزءَ مِنَ المُستوى الَّذي لا تقعُ فيهِ هذهِ النقطةُ، كما في الشَّكلِ الآتي:



أتحقَّقُ مِنْ فهمي

أمثّلُ المُتباينةَ الخطيَّةَ $y - 3x \leq 0$ في المُستوى الإحداثيِّ.

أفكّرُ

هلْ يمكنُ استعمالُ النقطةِ $(0, 0)$ لفحصِ المُتباينةِ؟ أبرّرُ إجابتي.

تمثيلُ المُتبايناتِ الخطيَّةِ بمُتغيِّرٍ واحدٍ بيانيًّا

تعلَّمتُ سابقًا تمثيلَ المُتباينةِ الخطيَّةِ بمُتغيِّرٍ واحدٍ على خطِّ الأعدادِ، ويمكنُ أيضًا تمثيلُها في المُستوى الإحداثيِّ.

أتذكَّرُ

معادلةُ المستقيمِ الرأسيِّ تكونُ دائمًا على الصورةِ $x = a$

مثال 4

أمثّلُ كُلًّا مِنَ المُتبايناتِ الآتيةِ في المُستوى الإحداثيِّ:

1 $x > -1$

الخطوةُ 1: أمثّلُ المُستقيمَ الحُدوديَّ.

أمثّلُ المُستقيمَ الحُدوديَّ $x = -1$ في المُستوى الإحداثيِّ. وبِما أنَّهُ لا توجدُ مُساواةٌ في رَمزِ المُتباينةِ فَيُرسَمُ متقطِّعًا.

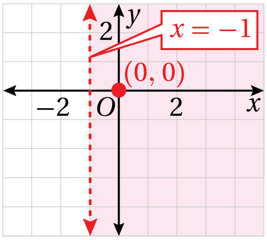
الخطوةُ 2: أحدّدُ منطقةَ الحُلولِ المُمكِنةِ.

أختارُ نقطةً لا تقعُ على المُستقيمِ الحُدوديِّ، مثلَ $(0, 0)$، ثمَّ أتحقّقُ إذا كانَ الناتجُ صحيحًا أمْ لا عندَ تعويضِها في المُتباينةِ:

المُتباينةُ الخطيَّةُ	$x > -1$
بتعويضِ $x = 0$	$0 \overset{?}{>} -1$
الناتجُ صحيحٌ	$0 > -1$ ✓

الخطوةُ 3: أظلّلُ منطقةَ الحُلولِ المُمكِنةِ.

بِما أنَّ النقطةَ $(0, 0)$ هِيَ إحدى الحلولِ المُمكِنةِ للمُتباينةِ، فأظلّلُ الجُزءَ مِنَ المُستوى الَّذي تقعُ فيهِ هذهِ النقطةُ، كما في الشَّكلِ الآتي:



2 $y \leq 3$

الخطوةُ 1: أمثّلُ المُستقيمَ الحُدوديَّ.

أمثّـلُ المُسـتقيمَ الحُدوديَّ $y = 3$ في المُسـتوى الإحداثيِّ. وبِما أنَّه توجدُ مُساواةٌ في رَمزِ المُتبايِنةِ فيُرسَمُ متّصِلًا.

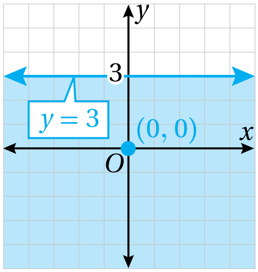
الخطوةُ 2: أحدّدُ منطقةَ الحُلولِ المُمكِنةِ.

أختارُ نقطةً لا تقعُ على المُستقيمِ الحُدوديِّ، مثلَ $(0, 0)$، ثمَّ أتحقّقُ إذا كانَ الناتجُ صحيحًا أمْ لا عندَ تعويضِها في المُتبايِنةِ:

المُتبايِنةُ الخطيَّةُ	$y \leq 3$
بتعويضِ $y = 0$	$0 \overset{?}{\leq} 3$
الناتجُ صحيحٌ	$0 \leq 3$ ✓

الخطوةُ 3: أظلّلُ منطقةَ الحُلولِ المُمكِنةِ.

بما أنَّ النقطةَ $(0, 0)$ هِيَ إحدى الحلولِ المُمكِنةِ للمُتبايِنةِ، فأظلّلُ الجُزءَ مِنَ المُسـتوى الَّذي تقعُ فيهِ هذهِ النقطةُ، كما في الشَّكلِ الآتي.



أتذكَّرُ

معادلةُ المسـتقيمِ الأُفقيِّ تكونُ دائمًا على الصورةِ $y = a$

أتعلَّمُ

عنـدَ تمثيـلِ المُتبايِنـةِ الخطيَّـةِ بمُتغيِّـرٍ واحدٍ في المُستوى الإحداثيِّ، يكونُ المُستقيمُ الحُدوديُّ إمّا أفقيًّا أوْ عَموديًّا.

أتحقَّقُ مِنْ فهمي

أمثّلُ كُلًّا مِنَ المُتبايناتِ الآتيةِ في المُستوى الإحداثيِّ:

a) $x \leq 4$ **b)** $y > -5$ **c)** $y \geq 0$

للمُتبايناتِ استعمالاتٌ كثيرةٌ في المواقفِ العلميَّةِ والحياتيَّةِ؛ إذ تُساعِدُنا على اتِّخاذِ القرارِ الأنسبِ المُتعلِّقِ بتحديدِ القِيَمِ المُمكِنةِ ضمنَ شُروطٍ محدَّدةٍ.

مثال 5 : مِنَ الحياةِ

دراسةٌ: إذا عَلِمتُ أنَّ لدى عمّارٍ 60 دقيقةً على الأكثرِ لإنهاءِ الواجبِ المنزليِّ لِمادَّتَي الرياضيّاتِ والعلومِ، فأكتبُ مُتباينةً خطيَّةً بمُتغيِّرَينِ تمثِّلُ عددَ الدقائقِ الَّتي يمكنُ أنْ يقضيَها عمّارٌ في حلِّ كلِّ واجبٍ، ثمَّ أمثّلُها في المُستوى الإحداثيِّ.

معلومةٌ

إنّ المثابرةَ على حلِّ الواجباتِ المنزليّةِ تُعَزِّزُ تعلُّمي وتُرسِّخُهُ في ذِهني، وتُساعِدُني على قياسِ مَدى إتقانِيَ المهاراتِ الرياضيّةَ، وتغرسُ في نفسي الاعتمادَ على الذّاتِ وتحمّلَ المسؤوليّةِ.

الخطوةُ 1: أكتبُ المُتباينةَ.

بالكلماتِ: عددُ الدقائقِ اللازمةِ لإنهاءِ الواجبِ المنزليِّ على الأكثرِ 60 دقيقةً.

أختارُ مُتغيِّرًا: لِيَكُنْ x ممثِّلًا لعددِ الدقائقِ اللازمةِ لإنهاءِ واجبِ الرياضياتِ، وَ y عددَ الدقائقِ اللازمةِ لإنهاءِ واجبِ العلومِ.

أكتبُ المُتباينةَ: $x + y \leq 60$

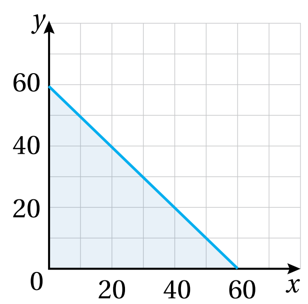
الخطوةُ 2: أمثّلُ المُتباينةَ بيانيًّا.

أمثّلُ المُستقيمَ الحُدوديَّ $x + y = 60$ في المُستوى الإحداثيِّ. وَبِما أنَّهُ توجدُ مُساواةٌ في رَمزِ المُتباينةِ فَيُرسَمُ المُستقيمُ الحدوديُّ متّصِلًا.

أختارُ نقطةً لا تقعُ على المُستقيمِ الحُدوديِّ، مثلَ $(0, 0)$، ثمَّ أتحقّقُ إذا كانَ الناتجُ صحيحًا أمْ لا عندَ تعويضِها في المُتباينةِ:

المُتباينةُ الخطيَّةُ	$x + y \leq 60$
بتعويضِ $x = 0, y = 0$	$0 + 0 \overset{?}{\leq} 60$
الناتجُ صحيحٌ	$0 \leq 60$ ✓

بِمـا أنَّ النقطـةَ $(0, 0)$ هِيَ إحـدى الحلـولِ المُمكِنةِ للمُتباينـةِ، وَبِمـا أنَّ قِيَـمَ x وَ y يجـبُ أنْ تكـونَ موجبـةً؛ لأنَّهـا تمثِّـلُ الزَّمَـنَ، فأظلّـلُ الجُـزءَ مِـنَ المُستوى الَّـذي يقـعُ فـي الرُّبـعِ الأوَّلِ، كمـا فـي الشَّـكلِ المُجـاوِرِ.



أُلاحِـظُ أيضًـا أنَّ أيَّ نقطـةٍ يقـعُ إحداثيُّهـا علـى المُسـتقيمِ الحُـدوديِّ، أوْ ضمـنَ المنطقـةِ المُظلَّلـةِ، فإنّها تُعَـدُّ حَلًّا. فمـثلًا، النقطـةُ $(20, 40)$ تمثّـلُ حَلًّا للمُتباينـةِ، وَ $(30, 30)$ تمثّلُ أيضًـا حَلًّا لهـا.

أتحقَّقُ مِنْ فهمي

نِجارةٌ: إذا عَلِمتُ أنَّ نجارًا يريدُ شِــراءَ نوعَيْنِ مِنَ الخشبِ، لا يزيدُ ثمنُهُما الكُلّيُّ على JD 72، وَوُجِدَ أنَّ ثمنَ المتــرِ الطوليِّ مِنَ النَّوعِ الأوَّلِ JD 4، وَمِنَ النَّــوعِ الثاني JD 6، فأكتبُ مُتباينةً خطيَّةً بمُتغيِّرينِ تمثِّلُ كميَّةَ الخشــبِ الَّتي يمكنُ للنَّجارِ شِــراؤُها مِنْ كلِّ نــوعٍ، ثمَّ أمثِّلُها في المُستوى الإحداثيِّ.

تُستعمَلُ الحساباتُ الرياضيَّةُ كثيـرًا في مهنـةِ النِّجـارةِ؛ لاسـتغلالِ الألواحِ الخشبيَّةِ بطريقةٍ مُثلى وتجنُّبِ الهَدرِ.

أتدرَّبُ وأحُلُّ المسائلَ

أحدّدُ إذا كانَ كلُّ زوجٍ مُرَتَّبٍ ممّا يأتي يمثِّلُ حَلًّا للمُتباينةِ: $x + 3y < 6$

1. $(0, 1)$
2. $(-2, 4)$
3. $(8, -1)$

أحدّدُ إذا كانَ كلُّ زوجٍ مُرَتَّبٍ ممّا يأتي يمثِّلُ حَلًّا للمُتباينةِ: $-3x + 4y \geq 12$

4. $(-5, 3)$
5. $(0, 2)$
6. $(3, 7)$

أمثّلُ كُلًّا مِنَ المُتبايناتِ الآتيةِ في المُستوى الإحداثيِّ:

7) $y \le 3 - 2x$

8) $x + y < 11$

9) $x - 2y < 0$

10) $4y - 8 \ge 0$

11) $3x - y \le 6$

12) $2x + 5y < -10$

13) $-4x + 6y > 24$

14) $y < 3x + 3$

15) $-2x \ge 10$

16) $x < 6$

17) $y > -2$

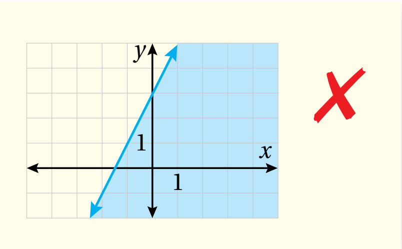
18) $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} < 1$

19) **حقائبُ:** يصنعُ جمالٌ حقائبَ كبيرةً وصغيرةً للسيّداتِ؛ لبيعِها في معرضِ الحِرَفِ اليدويَّةِ. إذا كانَ يحتاجُ إلى 3 أيامٍ لصنعِ الحقيبةِ الصغيرةِ، و 5 أيامٍ لصنعِ الحقيبةِ الكبيرةِ، فأكتبُ مُتباينةً خطيَّةً بمُتغيِّرَينِ تمثِّلُ عددَ الحقائبِ الَّتي يمكنُ لهُ صنعُها مِنْ كلِّ نوعٍ في 30 يومًا حدًّا أقصى قبلَ يومِ افتتاحِ المعرضِ، ثمَّ أمثّلُها في المُستوى الإحداثيِّ.

20) **تَسَوُّقٌ:** تريدُ سامية شِراءَ العِنَبِ وَالتُّفّاحِ، بحيثُ لا يزيدُ المبلغُ الَّذي تدفَعُهُ ثمنًا لِكِلا النَّوعَيْنِ على JD 6. إذا كانَ ثمنُ الكيلوغرامِ الواحدِ مِنَ العِنَبِ JD 1.5، وثمنُ الكيلوغرامِ الواحدِ مِنَ التُّفّاحِ JD 1، فأكتبُ مُتباينةً خطيَّةً بمُتغيِّرَينِ تمثِّلُ عددَ الكيلوغراماتِ الَّتي يمكنُ لسامية أنْ تشترِيَها مِنْ كلِّ نوعٍ، ثمَّ أمثِّلُها في المُستوى الإحداثيِّ.

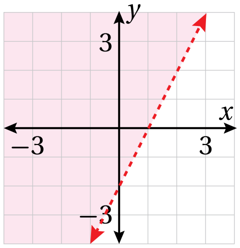
مهاراتُ التفكيرِ العُليا

21) **أكتشفُ الخطأَ:** مَثَّلَ رامي المُتباينةَ $y < 2x + 3$، كما هُوَ مُبَيَّنٌ في الشَّكلِ المُجاورِ. أكتشفُ الخطأَ الَّذي وقعَ فيهِ رامي، وأصحِّحُهُ.



22) **مسألةٌ مفتوحةٌ:** أكتبُ مُتباينةً خطيَّةً بمُتغيِّرَينِ، بحيثُ تمثِّلُ النقطتانِ $(-1, 3)$ وَ $(1, 6)$ حَلًّا لها، في حينِ لا تمثِّلُ النقطةُ $(4, 0)$ حَلًّا.

23) **تبريرٌ:** أكتبُ المُتباينةَ الخطيَّةَ المُعطى تمثيلُها البيانيُّ في الشَّكلِ المُجاورِ، وأبرِّرُ إجابتي.



معمل برمجيّة جيوجبرا

تمثيلُ المُتبايناتِ الخطيَّةِ بمُتغيِّرَينِ بيانيًّا

Graphing Linear Inequalities in Two Variables

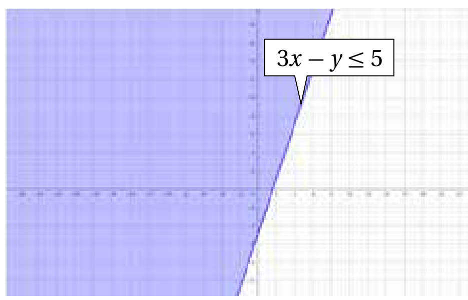
يُمكنُني استعمالُ برمجيَّةِ جيوجيبرا؛ لتمثيلِ مُتبايناتٍ خطّيّةٍ بمُتغيِّرَينِ بيانيًّا في المستوى الإحداثي.

نشاطٌ أمثّلُ كلًّا مِنَ المُتبايناتِ الآتيةِ بيانيًّا؛ باستعمالِ برمجيَّةِ جيوجيبرا:

1 $3x - y \leq 5$

أكتبُ المُتباينةَ في شريطِ الإدخالِ؛ بنَقرِ المفاتيحِ الآتيةِ:

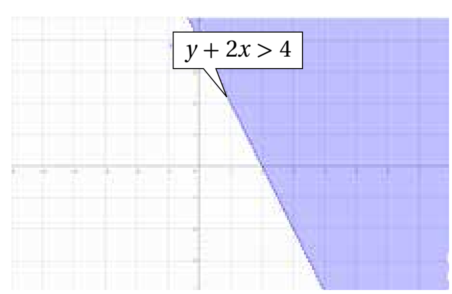
3	x	$-$	y	$\leq$	5



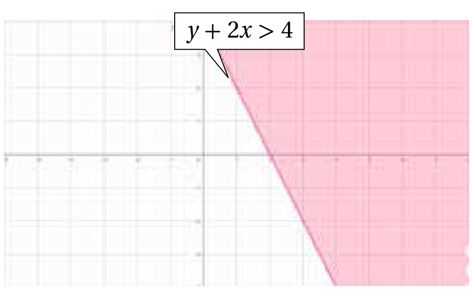
2 $y + 2x > 4$

الخطوةُ 1: أكتبُ المتباينةَ في شريطِ الإدخالِ؛ بنَقرِ المفاتيحِ الآتيةِ:

y	$+$	2	x	$>$	4



الخطوةُ 2: يمكنُ تغييرُ اللونِ الأزرقِ الّذي حدّدَتْهُ برمجيّةُ جيوجيبرا بالنّقرِ على المُتباينةِ المُرادِ تغييرُ لونِها، ثُمَّ النّقرِ على ، ثُمَّ النّقرِ علَى ، ثُمَّ اختيارِ (color) مِنَ القائمةِ التي تظهرُ يمينَ الشاشةِ، ومنْها أختارُ لونًا آخرَ مثلَ اللونِ الزهريِّ.



أتدرّبُ أمثّلُ كلًّا مِنَ المُتبايناتِ الآتيةِ بيانيًّا؛ باستعمالِ برمجيةِ جيوجيبرا:

1) $-5x - 2y \geq 3$
2) $11x + 7y > -2$
3) $7x + y < -3$
4) $x < y$
5) $x - 8y \geq 0$
6) $9x - y > 8$

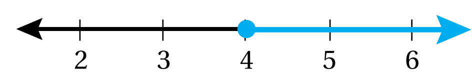
أختارُ رمزَ الإجابةِ الصَّحيحةِ لكلٍّ ممّا يأتي:

1 حلُّ المُتباينةِ $-9x + 17 \geq -64$، هُوَ:

a) $\{x \mid x \leq 9\}$ b) $\{x \mid x \geq 9\}$

c) $\{x \mid x \leq -9\}$ d) $\{x \mid x \geq -9\}$

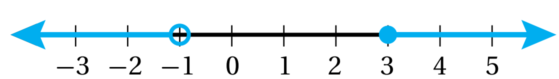
2 الفترةُ الَّتي تعبّرُ عَنِ التمثيلِ البيانيِّ الآتي، هِيَ:



a) $(4, \infty)$ b) $[4, \infty)$

c) $(-\infty, 4)$ d) $(-\infty, 4]$

3 المُتباينةُ المُركَّبةُ الَّتي تعبّرُ عَـنِ التمثيلِ البيانيِّ الآتي، هِيَ:



a) $-1 < x < 3$ b) $x \leq -1$ or $x > 3$

c) $x < -1$ or $x \geq 3$ d) $x > -1$ or $x \leq 3$

4 مجموعةُ حلِّ المُتباينةِ $-7 < x + 2 < 4$، هِيَ:

a) $(-5, 6)$ b) $(-9, 6)$

c) $(-5, 2)$ d) $(-9, 2)$

5 الفترةُ التي تمثّلُ حلَّ المتباينةِ $4x + 8 \geq -12$ هيَ:

a) $(-\infty, -5]$ b) $[-5, \infty)$

c) $(-5, \infty)$ d) $(-\infty, -5)$

أكتبُ كلَّ مجموعةٍ ممّا يأتي بطريقةِ الصِّفةِ المُميِّزةِ:

6 $\{11, 12, 13, 14, \ldots\}$

7 $\{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$

8 $\{3, 6, 9, 12\}$

9 $\{3, 2, 1\}$

أعبّرُ عَنْ كلٍّ مِنَ المجموعاتِ الآتيةِ، باستعمالِ طريقةِ سردِ العناصرِ وطريقةِ الصِّفةِ المُميِّزةِ:

10 الأعدادُ الزوجيَّةُ الَّتي تزيدُ على 7 وتقلُّ عَنْ 20

11 الأعدادُ الكُلّيَّةُ الَّتي تقلُّ عَنْ 4

أكتبُ مُتباينةً تمثِّلُ كلَّ جملةٍ ممّا يأتي، ثمَّ أمثّلُها على خطِّ الأعدادِ:

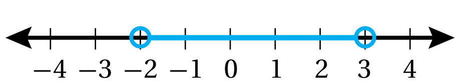
12 عددٌ على الأكثرِ -3 أوْ على الأقلِّ 5

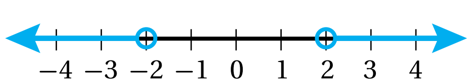
13 عددٌ على الأقلِّ 2 وعلى الأكثرِ 9

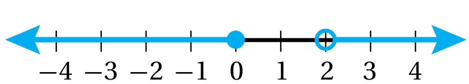
14 عددٌ لا يزيدُ على 6 ولا يقلُّ عن -4

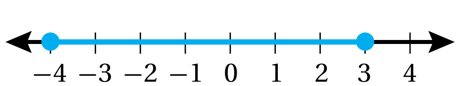
15 عددٌ أقلُّ مِنْ 100 أوْ أكبرُ مِنْ 300

أكتبُ مُتباينةً مُركَّبةً تعبّرُ عَنْ كلِّ تمثيلٍ ممّا يأتي، ثمَّ أعبّرُ عنها برمزِ الفترةِ:

16


17


18


19


أحدّدُ إذا كانَ كلُّ زوجٍ مُرَتَّبٍ ممّا يأتي يمثِّلُ حَلًّا للمُتباينةِ:

$$2x + y > -3$$

20 $(2, -2)$ 21 $(1, -3)$

22 $(-5, 4)$ 23 $(2, 0)$

أَجِدُ مجموعةَ حَلِّ كُلِّ مُتباينــةٍ ممّا يأتي، ثمَّ أمثّلُها على خطِّ الأعدادِ:

24 $-2 \le x - 7 \le 1$

25 $-2 < -2n + 1 < 7$

26 $-8 < \frac{2}{3}x - 4 < 10$

27 $3x + 2 < -10$ or $2x - 4 > -4$

28 $x - 1 \le 5$ or $x + 3 \ge 10$

29 $4x - 3 > 11$ or $4x - 3 \le -11$

أعبِّرُ عنْ كلِّ مجموعةٍ ممّا يأتي بطريقتَينِ:

30 مجموعةُ الأعدادِ الصحيحةِ التي تزيدُ على -3

31 مجموعةُ الأعدادِ الصحيحةِ من 2 إلى 6

32 مجموعةُ الأعدادِ الحقيقيةِ الأكبرِ منْ -2

33 مجموعةُ الأعدادِ الحقيقيةِ من 1 إلى 7

أُعطــي زوجًا مُرتَّبًا يحقّقُ كلَّ متباينةٍ ممّا يأتي وزوجًا مُرتَّبًا لا يحقّقُها:

34 $2x + 5y \ge -10$ 35 $\frac{1}{3}x - 6y < 1$

أمثلُ كُلًّا مِنَ المُتبايناتِ الآتيةِ في المُستوى الإحداثيِّ:

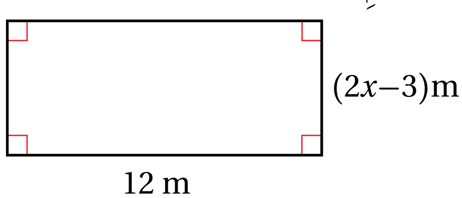
36 $y \le -2x + 1$ 37 $x < -4$

38 $y \ge x - 1$ 39 $y > 5x - 5$

40 $4x - y < 2$

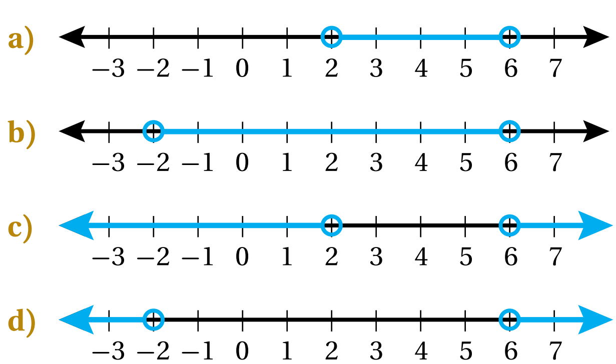
41 **نقلٌ:** يمكنُ لشــاحنةٍ نقلُ 3500 kg مِنَ البضائعِ حدًّا أقصى. إذا كانتِ الشــاحنةُ تنقلُ ثلّاجاتٍ كتلةُ الواحدةِ منها 125 kg، وغسّــالاتٍ كتلةُ الواحدةِ منها 100 kg، فأكتبُ مُتباينــةً خطيَّةً بمُتغيِّرينِ تمثِّــلُ عددَ الثلّاجاتِ والغسّالاتِ الّتي يمكنُها نقلُها، ثمَّ أمثّلُها في المُستوى الإحداثيِّ.

42 **هندسةٌ:** يبيّنُ الشكلُ الآتي مســتطيلًا مساحتُهُ أكبرُ منْ $60\ m^2$. أكتــبُ متباينةً تعبّرُ عنِ المســاحةِ، ثمَّ أحلُّها بإيجادِ القيمِ المُمكِنةِ لِـ x.



تدريبٌ على الاختباراتِ الدَّوْليَّةِ

43 التمثيــلُ البيانيُّ الذي يمثّــلُ مجموعةَ حــلِّ المتباينةِ المُركَّبةِ $2x - 3 > 9$ or $1 - 3x > -5$ هوَ:



44 الــزَّوجُ المُرَتَّــبُ الَّــذي لا يمثِّــلُ حَلًّا للمُتباينــةِ $3x - 5y < 30$، هُوَ:

a) $(1, -7)$ b) $(-1, 7)$

c) $(0, 0)$ d) $(-5, -5)$

الوحدةُ
2

العلاقاتُ والاقتراناتُ
Relations and Functions

ما أهميَّةُ هذهِ الوحدةِ؟

يُعَدُّ الاقتــرانُ التربيعيُّ أحدَ أكثرِ الاقتراناتِ شُــهرةً واســتخدامًا في الرياضياتِ؛ ولذلــك خُصِّصَتْ هذهِ الوحدةُ لتقديمِ خصائصِ هذا الاقترانِ الجبريّةِ والبيانيّةِ وبعضِ استعمالاتِهِ الحياتيّةِ، مثلِ تصميمِ الجُسورِ والمباني، كمــا يظهرُ في قصرِ المُشَــتّى التاريخيِّ.

تعلَّمتُ سابقًا:

- ✓ تمثيلَ الاقتراناتِ الخطيّةِ بيانيًّا.
- ✓ حلَّ المعادلاتِ الخطيّةِ بمُتغيِّرٍ واحدٍ.
- ✓ إجراءَ تحويلاتٍ هندســيّةٍ لأشكالٍ ثنائيّةِ البُعدِ في المُستوى الإحداثيِّ.
- ✓ نمذجةَ ظواهرَ ومواقفَ حياتيّةٍ هندســيًّا على مفهومِ الاقترانِ الخطيِّ.

سأتعلَّمُ في هذهِ الوحدةِ:

- ◄ تحديدَ ما إذا كانتِ العلاقةُ اقترانًا أمْ لا.
- ◄ تفسيرَ التمثيلاتِ البيانيةِ للعلاقاتِ.
- ◄ تعرُّفَ الاقترانِ التربيعــيِّ وخصائصِهِ، وتمثيلَهُ بيانيًّا في المُستوى الإحداثيِّ.
- ◄ تمثيلَ مُنحنيــاتِ الاقترانــاتِ التربيعيّةِ الناتجةِ منْ تطبيقِ تحويلٍ هندســيٍّ أوْ أكثرَ على مُنحنى الاقترانِ الرئيسِ.

مشروعُ الوحدةِ

القطعُ المُكافِئُ في حياتِنا

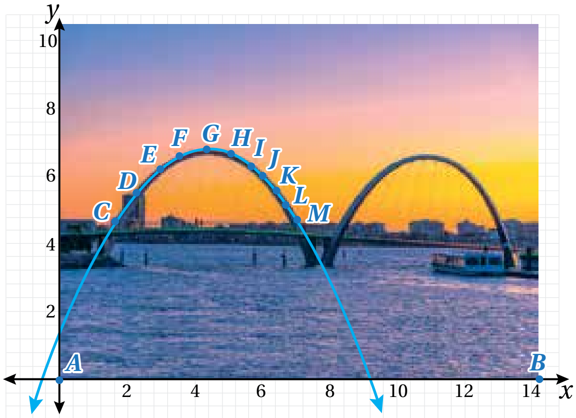
فكرةُ المشروعِ البحثُ عَنِ الاقترانِ التربيعيِّ في نماذجَ حياتيَّةٍ.

الموادُّ والأدواتُ شبكةُ الإنترنت، برمجيَّةُ جيوجيبرا.

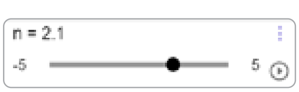
خطواتُ تنفيذِ المشروعِ:

1 أبحثُ مَعَ أفرادِ مجموعتي في شبكةِ الإنترنت عَنْ صُوَرٍ لِنماذجَ حياتيَّةٍ تَظهَرُ فيها مُنحنياتٌ على شكلِ قطعٍ مُكافِئٍ، مثلِ: الجسورِ، ونوافيرِ المياهِ، وواجهاتِ بعضِ المباني، أوْ ألتقِطُ صورةً لذلكَ، ثمَّ أحفظُها في ملفٍّ على جهازِ الحاسوبِ.

2 أستعملُ برمجيَّةَ جيوجبرا لإيجادِ قاعدةِ الاقترانِ التربيعيِّ، الذي يمثِّلُ القطعَ المُكافِئَ الظاهرَ في الصورةِ، بِاتِّباعِ الخُطواتِ الآتيةِ:



- أنقُرُ على أيقونةِ Image مِنْ شريطِ الأدواتِ، ثمَّ أختارُ الصورةَ التي حَفِظْتُها.
- أعدِّلُ موقعَ الصورةِ، وأختارُ مقاسًا مناسبًا لها بِتَحريكِ النقطتَيْنِ A وَ B، اللّتَينِ تَظهرانِ عليها.
- أحدِّدُ بعضَ النقاطِ على القطعِ المُكافِئِ الظاهرِ في الصورةِ، باستعمالِ أيقونةِ A مِنْ شريطِ الأدواتِ.
- أكتبُ الصيغةَ FitPoly ({C, D, E, F, G, H, J, K, L, M},n) في شريطِ الإدخالِ لِيَظهَرَ مُنحنًى فوقَ الصورةِ، وَمُعادلةٌ في شريطِ الإدخالِ.



- أستعملُ المُنزلقةَ التي تظهرُ في الصورةِ المجاورةِ وأُغيِّرُ قيمةَ n لضبطِ المُنحنى الظاهرِ، بحيثُ ينطبقُ تمامًا على المُنحنى الظاهرِ الصورةِ، وتظهرُ قاعدةُ الاقترانِ التربيعيِّ المُمَثِّلِ للقطعِ المُكافِئِ انطباقًا دقيقًا في شريطِ الإدخالِ.
- أَجِدُ مُعادلةَ محورِ التَّماثُلِ، وإحداثِيَّيِ الرأسِ ومجالَ الاقترانِ التربيعيِّ ومَداهُ واتجاهَ فتحتِهِ، وقيمتَهُ العُظمى أوِ الصُّغرى.
- أعدِّلُ موقعَ الصورةِ بِتَحريكِها إلى اليمينِ وإلى اليسارِ وإلى الأعلى وإلى الأسفلِ، ثمَّ أُعيدُ الخُطواتِ السابقةَ لتحديدِ قاعدةِ الاقترانِ في كلِّ مرَّةٍ، وَأصفُ كيفَ يرتبطُ مُنحنى كلِّ اقترانٍ منها بِمُنحنى الاقترانِ الأصليِّ.

عرضُ النتائجِ:

أُعِدُّ عرضًا تقديميًّا أُبَيِّنُ فيهِ:

- خطواتِ تنفيذِ المشروعِ موضَّحةً بالصورِ (أستعملُ خاصيَّةَ طباعةِ الشاشةِ).
- معلومةً عَنِ الصورةِ التي اخترتُها.

الدرس 1

الاقترانات
Functions

فكرةُ الدرسِ
- تعرّفُ العلاقةِ، وتحديدُ ما إذا كانتِ العلاقةُ اقترانًا أمْ لا.
- تحديدُ مجالِ الاقترانِ ومَداهُ.

المصطلحاتُ علاقةٌ، مجالٌ، مَـدًى، الاقترانُ، اقترانٌ مُتَّصِلٌ، اقتـرانٌ مُنفَصِلٌ، اختبارُ الخطِّ الرأسـيِّ، الاقترانُ الخطيُّ، الاقترانُ غيرُ الخطيِّ.

مسألةُ اليومِ يمثِّلُ الاقترانُ $d(t) = 300000t$ المسافةَ d بالكيلومترِ، التي يقطعُها الضَّوءُ بعدَ t ثانيةٍ تقريبًا:

1) أَجِدُ المسافةَ التي يقطعُها الضَّوءُ بعدَ 15 s

2) أَجِدُ عددَ الثواني اللازمةِ ليقطعَ الضَّوءُ 12 مليونَ كيلومترٍ.

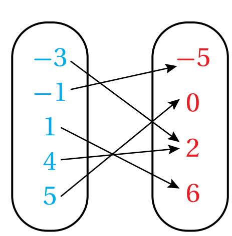
العلاقةُ والاقترانُ

تمثِّلُ أيُّ مجموعةٍ منَ الأزواجِ المُرَتَّبَةِ **علاقةً** (relation)؛ حيثُ الإحداثيُّ x للأزواجِ المُرَتَّبَةِ هوَ المُدخَلاتُ، والإحداثيُّ y هوَ المُخرَجاتُ، ويمكنُ التعبيرُ عنِ العلاقةِ بطرائقَ مختلفةٍ، منها: الأزواجُ المُرَتَّبَةُ، والتمثيلُ البيانيُّ، وجدولُ المُدخلاتِ والمُخرَجاتِ، والمُخَطَّطُ السهميُّ. فمثلاً، تمثِّلُ مجموعةُ الأزواجِ المُرَتَّبَةِ الآتيةِ علاقةً:

$$\{(1, 6), (-3, 2), (5, 0), (-1, -5), (4, 2)\}$$

ويمكنُ التعبيرُ عنْ هذهِ العلاقةِ بطرائقَ مختلفةٍ، كما يأتي:

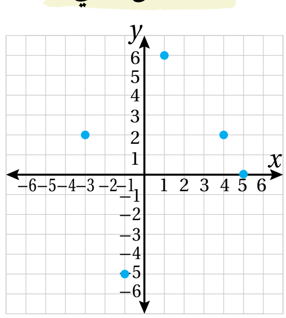
مُخَطَّطٌ سهميٌّ



جدولُ مُدخَلاتٍ وَمُخرَجاتٍ

x	y
1	6
−3	2
5	0
−1	−5
4	2

تمثيلٌ بيانيٌّ

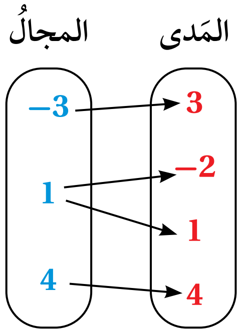


تُسَمّى مجموعةُ مُدخَلاتِ العلاقةِ **المجالَ** (domain)، أمّا مجموعةُ مُخرَجاتِ العلاقةِ فتُسَمّى **المَدى** (range)، وَتُسَمّى العلاقةُ التي تربطُ كلَّ عنصرٍ في مجالِها بعنصرٍ واحدٍ فقط منَ المَدى **اقترانًا** (function).

مثال 1

أحدّدُ مجالَ كلِّ علاقةٍ ممّا يأتي وَمَداها، ثمَّ أحدّدُ ما إذا كانتْ تمثّلُ اقترانًا أمْ لا:

1



المجالُ: $\{-3, 1, 4\}$ المَدى: $\{3, -2, 1, 4\}$

ألاحِظُ ارتبـاطَ العنصرِ 1 في المجالِ بالعنصرينِ -2 وَ 1 في المَدى. إذنْ، لا تمثّلُ هذهِ العلاقةُ اقترانًا.

2

x	5	3	2	0	−4	−6
y	1	3	1	3	−2	2

المجالُ: $\{5, 3, 2, 0, -4, -6\}$ المَدى: $\{1, 3, -2, 2\}$

ألاحِظُ ارتباطَ كلِّ عنصُرٍ في المجالِ بعنصرٍ واحدٍ في المَدى. إذنْ، تمثّلُ هذهِ العلاقةُ اقترانًا.

3 $\{(0, 1), (2, 4), (3, 7), (5, 4)\}$

المجالُ: $\{0, 2, 3, 5\}$ المَدى: $\{1, 4, 7\}$

ألاحِظُ ارتباطَ كلِّ عنصرٍ في المجالِ بعنصرٍ واحدٍ في المَدى. إذنْ، تمثّلُ هذهِ العلاقةُ اقترانًا.

4 $\{(-4, 2), (6, -1), (0, 0), (-4, 0)\}$

المجالُ: $\{-4, 6, 0\}$ المَدى: $\{2, -1, 0\}$

ألاحِظُ ارتباطَ العنصرِ -4 في المجالِ بالعنصرينِ 2 وَ 0 في المَدى. إذنْ، لا تمثّلُ هذهِ العلاقةُ اقترانًا.

أتعلَّمُ

يمكـنُ أنْ يرتبطَ أكثرُ منْ عنصرٍ في مجالِ الاقترانِ بعنصرٍ واحدٍ في مَداهُ.

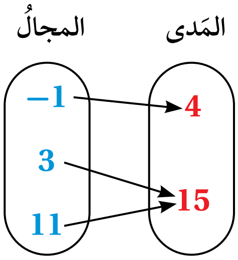
أتذكّرُ

عنـدَ كتابـةِ المجموعةِ بطريقـةِ سـردِ العناصرِ، أكتبُ العنصرَ المُكرَّرَ مَرَّةً واحدةً. علمًـا أنَّ ترتيبَ العناصرِ ليسَ مُهمًّا.

أتحقّقُ مِنْ فهمي

أحدّدُ مجالَ كلِّ علاقةٍ ممّا يأتي وَمَداها، ثمَّ أحدّدُ ما إذا كانتْ تمثّلُ اقترانًا أمْ لا:

a)



b)

x	5	2	−7	2	5
y	4	8	9	12	14

c) $\{(-2, 5), (0, 2), (4, 5), (5, 6)\}$

d) $\{(6, 5), (4, 3), (6, 4), (5, 8)\}$

الاقترانُ المُتَّصِلُ والاقترانُ المُنفَصِلُ

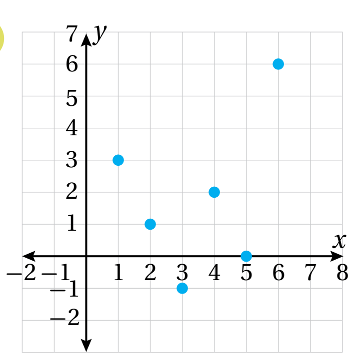
يُسَمّى الاقترانُ الذي يُمَثَّلُ في المُستوى الإحداثيِّ بنقاطٍ غيرِ مُتَّصِلَةٍ **اقترانًا مُنفَصِلًا** (discrete function)، أمّا الاقترانُ الذي يُمَثَّلُ بخطٍّ أوْ منحنًى دونَ انقطاعٍ فَيُسَمّى **اقترانًا متّصِلًا** (continuous function).

يمكنُ تحديدُ مجالِ الاقتراناتِ المُنفَصِلَةِ وَالمُتَّصِلَةِ وَمَداها بتَمثيلِها بيانيًّا، كما في المثالِ الآتي:

مثال 2

أحدّدُ ما إذا كانَ كلُّ اقترانٍ ممّا يأتي مُنفَصِلًا أمْ مُتَّصِلًا، ثمَّ أحدّدُ مجالَهُ وَمَداهُ:

1



الاقترانُ المُمَثَّلُ في الشكلِ المُجاورِ مُنفَصِلٌ؛ لأنَّ تمثيلَهُ في المُستوى الإحداثيِّ على شَكلِ نقاطٍ غيرِ مُتَّصِلَةٍ.

لتحديدِ مجالِ الاقترانِ وَمَداهُ، أكتبُ الأزواجَ المُرَتَّبَةَ وأحدّدُ مِنها المجالَ وَالمَدى.

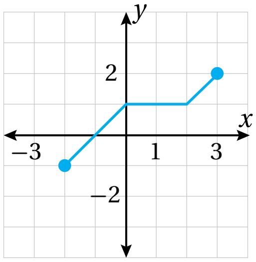
الأزواجُ المُرَتَّبَةُ: $\{(1, 3), (2, 1), (3, -1), (4, 2), (5, 0), (6, 6)\}$

المجالُ: $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ **المَدى:** $\{3, 1, -1, 2, 0, 6\}$

أتذكَّرُ

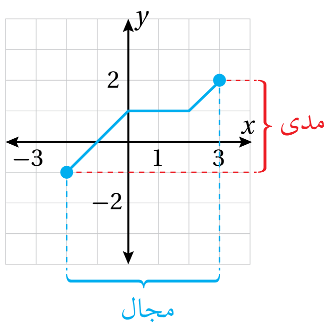
تمثّلُ قيمُ x المجالَ في حينِ تمثّلُ قيمُ y المَدى.

2



الاقترانُ المُمَثَّلُ في الشكلِ المُجاورِ مُتَّصِلٌ؛ لأنَّ تمثيلَهُ في المُستوى الإحداثيِّ على شكلِ قطعٍ مستقيمةٍ دونَ انقطاعٍ.

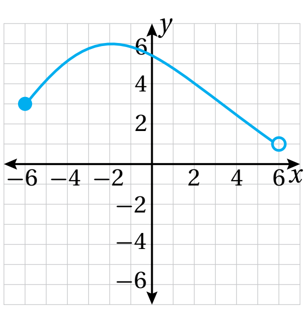
أستعمِلُ التمثيلَ البيانيَّ لتحديدِ قِيَمِ x وَقِيَمِ y، التي تمثِّلُ المجالَ وَالمَدى كالآتي:



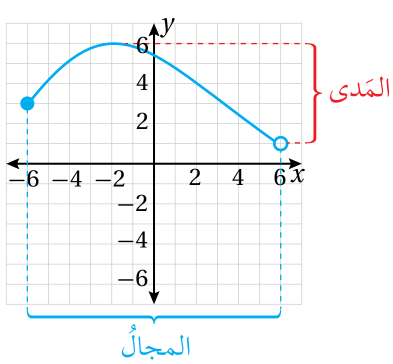
المجالُ: $\{x \mid -2 \leq x \leq 3\}$ أوِ الفترةِ $[-2, 3]$.

المَدى: $\{y \mid -1 \leq y \leq 2\}$ أوِ الفترةِ $[-1, 2]$.

3



الاقترانُ المُمَثَّلُ في الشكلِ المُجاورِ مُتَّصِلٌ؛ لأنَّ تمثيلَهُ في المُستوى الإحداثيِّ على شكلِ منحنًى ليسَ فيهِ انقطاعٌ. أستعمِلُ التمثيلَ البيانيَّ لتحديدِ قِيَمِ x وَقِيَمِ y، التي تمثِّلُ المجالَ والمَدى كالآتي:



المجالُ: $\{x \mid -6 \leq x < 6\}$ أوِ الفترةِ $[-6, 6)$

المَدى: $\{y \mid 1 < y \leq 6\}$ أوِ الفترةِ $(1, 6]$

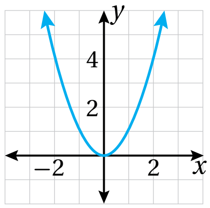
أتعلَّمُ

- يُكتَبُ مجالُ الاقترانِ المُنفصِلِ وَمَداهُ على شكلِ مجموعةٍ مِنَ العناصرِ المُنفصِلَةِ.
- يُكتَبُ مجالُ الاقترانِ المُتَّصِلِ وَمَداهُ على شكلِ فتراتٍ أوْ مجموعاتٍ بصيغةِ الصفةِ المُميِّزةِ للمجموعةِ التي فيها عددٌ لا نهائيٌّ مِنَ العناصرِ.

أتعلَّمُ

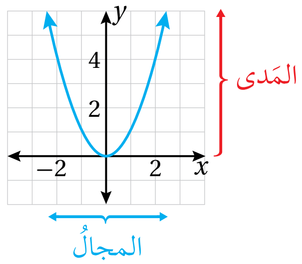
تعني الدائرةُ المفتوحةُ في التمثيلِ البيانيِّ أنَّ الإحداثيَّ x للزوجِ المُرَتَّبِ لا ينتمي إلى مجالِ الاقترانِ، والإحداثيَّ y لا ينتمي إلى مَدى الاقترانِ بسببِ قيمةِ x، وَيُعبَّرُ عنْ ذلكَ عندَ كتابةِ الفتراتِ باستعمالِ الرمزِ) أو الرمزِ (.

4



الاقترانُ المُمَثَّلُ في الشــكلِ المُجاورِ مُتَّصِــلٌ؛ لأنَّ تمثيلَهُ في المُستوى الإحداثيِّ على شكلِ منحنًى ليسَ فيهِ انقطاعٌ.

أســتعمِلُ التمثيــلَ البيانيَّ لتحديــدِ قِيَمِ x وَقِيَــمِ y، التي تمثّلُ المجالَ والمَدى كالآتي:



يَدُلُّ وُجودُ رأسِ السَّــهمِ في التمثيلِ البيانيِّ أعلاهُ على أنَّ المنحنى ممتدٌّ إلى مالانهايةٍ. وعليهِ، يمكنُ كتابةُ مجالِ الاقترانِ وَمَداهُ عَلى النَّحوِ الآتي:

المجالُ: $\{x \mid -\infty < x < \infty\}$ أوِ الفترةِ $(-\infty, \infty)$

المَدى: $\{y \mid y \geq 0\}$ أوِ الفترةِ $[0, \infty)$

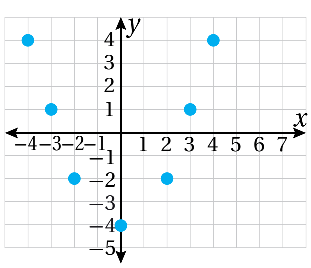
أفكِّر

هلْ يمكــنُ التعبيــرُ عنِ المجــالِ بطريقةٍ أخرى؟ أبرّرُ إجابتِي.

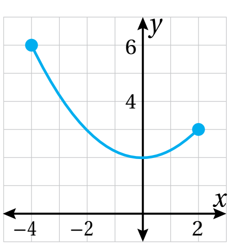
أتحقَّقُ مِنْ فهمي

أحدّدُ ما إذا كانَ كلُّ اقترانٍ ممّا يأتي مُنفَصِلًا أمْ مُتَّصِلًا، ثمَّ أحدّدُ مجالَهُ وَمَداهُ:

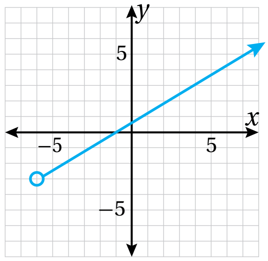
a)



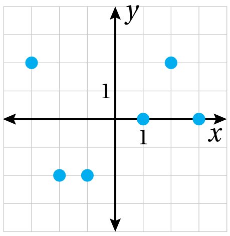
b)



c)



d)



اختبارُ الخطِّ الرأسيِّ

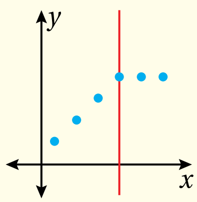
يُمكنُني اســتعمالُ **اختبارِ الخطِّ الرأســيِّ** (vertical line test) لتحديدِ ما إذا كانَتِ العلاقةُ المُمَثَّلَةُ بيانيًّا تمثّلُ اقترانًا أمْ لا.

مفهومٌ أساسيٌّ — اختبارُ الخطِّ الرأسيِّ

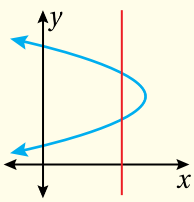
بالكلماتِ: تُعَدُّ العلاقةُ المُمَثَّلَةُ بيانيًّا اقترانًا إذا لم يَقطَعْ أيُّ خطٍّ رأسيٍّ تمثيلَها البيانيَّ في أكثرِ مِنْ نقطةٍ واحدةٍ.

أمثلةٌ:

اقترانٌ



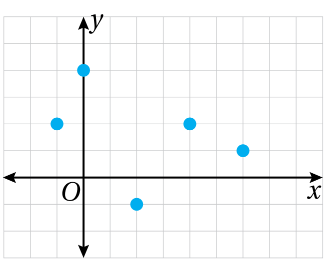
ليسَتِ اقترانًا



مثال 3

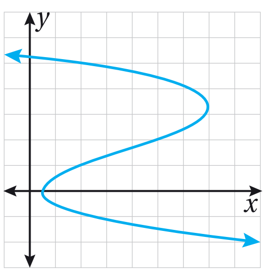
أحدّدُ ما إذا كانَتِ العلاقةُ المُمَثَّلَةُ بيانيًّا في كلٍّ ممّا يأتي تمثّلُ اقترانًا أمْ لا، وأبرّرُ إجابتي:

1



تمثّلُ العلاقةُ المُمَثَّلَةُ في الشــكلِ المُجاورِ اقترانًا؛ لأنَّهُ لا يوجَدُ خطٌّ رأســيٌّ يَمُرُّ بأكثرَ مِنْ نقطةٍ واحدةٍ في تمثيلِها البيانيِّ.

2

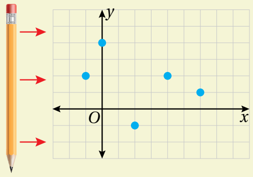


لا تمثّـلُ العلاقـةُ المُعطى تمثيلُهـا البيانـيُّ فـي الشـكلِ المُجـاورِ اقترانًـا؛ لأنَّها تفشـلُ فـي اختبارِ الخطِّ الرأسـيِّ. فمثـلًا، يوجـدُ مسـتقيمٌ رأسـيٌّ يقطـعُ التمثيـلَ البيانـيَّ في ثـلاثِ نقـاطٍ عنـدما $x = 2$

وهذا يعني أنَّ القيمةَ $x = 2$ في المجالِ ترتبطُ بثلاثِ قِيَمٍ مختلفةٍ لـِ y في المَدى.

أتعلَّمُ

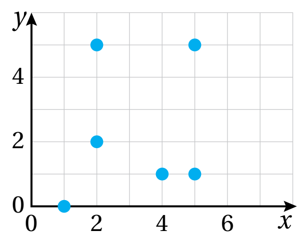
يُمكنُني اســتعمالُ قلمي لإجــراءِ اختبــارِ الخطِّ الرأســيِّ؛ إذْ أَضَعُهُ رأسيًّا يســارَ التمثيــلِ البيانيِّ، ثمَّ أبدأُ بتحريكِــهِ باتجاهِ اليمينِ، فإذا استمرَّ القلمُ بقطعِ التمثيــلِ البيانيِّ في نقطــةٍ واحدةٍ فقــطْ فإنَّ العلاقةَ تمثّلُ اقترانًا.



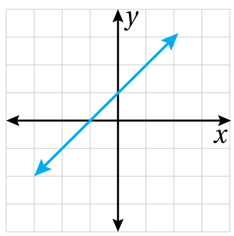
أتحقَّقُ مِنْ فهمي

أحدِّدُ ما إذا كانَتِ العلاقةُ المُمَثَّلةُ بيانيًّا في كلٍّ ممّا يأتي تمثّلُ اقترانًا أمْ لا، وأبرِّرُ إجابتي:

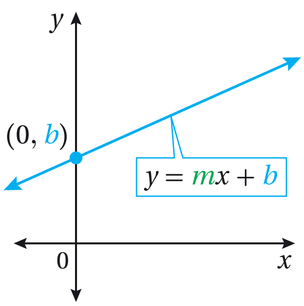
a)



b)



رمزُ الاقترانِ والاقترانُ الخطيُّ



يُبيّنُ الشكلُ المُجاورُ التمثيلَ البيانيَّ لمُعادلةٍ خطيَّةٍ بمُتغيِّرين، وقَدْ تعلَّمتُ سابقًا كتابَتَها باستعمالِ صيغةِ الميلِ والمقطعِ عَلى الصورة: $y = mx + b$؛ حيثُ m هوَ ميلُ المُستقيمِ وَ b المقطعُ y لهُ. وبما أنَّ التمثيلَ البيانيَّ لهذهِ المعادلةِ يجتازُ اختبارَ الخطِّ الرأسيِّ فإنَّها تُعَدُّ اقترانًا، وَيُسَمّى **اقترانًا خطيًّا** (linear function).

يمكنُ أيضًا كتابةُ قاعدةِ الاقترانِ الخطيِّ باستعمالِ رمزِ الاقترانِ $f(x)$ على الصورةِ الآتيةِ:

$$f(x) = mx + b$$

وتمثّلُ قِيَمُ x عناصرَ مجالِ الاقترانِ f، أمّا قِيَمُ $f(x)$ فتمثّلُ عناصرَ مَداهُ.

لغةُ الرِّياضياتِ

يُقرَأُ الرَّمزُ $f(x)$:

f of x

مثال 4

إذا كانَ $f(x) = 2x + 6$، فَأُجيبُ عَنِ الأسئلةِ الآتيةِ تِباعًا:

1 أَجِدُ $f(3)$

$f(x) = 2x + 6$ الاقترانُ المُعطى

$f(3) = 2(3) + 6$ بتعويضِ $x = 3$

$= 12$ بالتبسيطِ

2 أَجِدُ $f(-4)+10$

بتعويضِ $x=-4$	$f(-4)+10=(2(-4)+6)+10$
بالتبسيطِ	$=-2+10$
بالتبسيطِ	$=8$

3 أَجِدُ قيمةَ x التي تجعلُ $f(x)=-10$

الاقترانُ المُعطى	$f(x)=2x+6$
بتعويضِ $f(x)=-10$	$-10=2x+6$
بطرحِ 6 مِنْ طرفَيِ المُعادلةِ	$-16=2x$
بقسمةِ طرفَيِ المُعادلةِ على 2	$x=-8$

إذنْ، عندما $x=-8$، فإنَّ $f(x)=-10$

أتعلَّمُ

يمكنُ استعمالُ حروفٍ أُخرى للدَّلالةِ علَى الاقترانِ غيرِ حرفِ f، مثلِ: g أوْ h.

أتحقَّقُ مِنْ فهمي

إذا كانَ $g(x)=10-x$، فَأُجيبُ عَنِ الأسئلةِ الآتيةِ تِباعًا:

a) أَجِدُ $g(-5)$

b) أَجِدُ $g(3)+6$

c) أَجِدُ قيمةَ x التي تجعلُ $g(x)=-35$

للاقتراناتِ الخطيَّةِ تطبيقاتٌ حياتيَّةٌ كثيرةٌ.

مثال 5 : مِنَ الحياةِ

درجاتُ حرارةٍ: يمثّلُ الاقترانُ $t(m)=19m+65$ درجةَ الحرارةِ t بالفهرنهايت لفرنٍ في أحدِ الأيّامِ بعدَ تسخينِهِ مُدَّةَ m دقيقةً.

1 أَجِدُ درجةَ حرارةِ الفرنِ بعدَ 10 دقائقَ.

أَجِدُ $t(10)$:

الاقترانُ المُعطى	$t(m)=19m+65$
بتعويضِ $m=10$	$t(10)=19(10)+65$
بالتبسيطِ	$=255$

إذنْ، درجةُ حرارةِ الفرنِ بعدَ 10 دقائقَ مِنْ بَدءِ تسخينِهِ $255\ ^\circ F$

2 إذا كانتْ أقصى درجةِ حرارةٍ للفرنِ 350 °F، فَأَجِدُ مجالَ الاقترانِ وَمَداهُ.

الاقترانُ المُعطى	$t(m) = 19m + 65$
بتعويضِ $t(m) = 350$	$350 = 19m + 65$
بطرحِ 65 مِنْ طرفَيِ المُعادلةِ	$285 = 19m$
بقسمةِ طرفَيِ المُعادلةِ على 19	$m = 15$

يصلُ الفرنُ إلى أقصى درجةِ حرارةٍ عندَ تشــغيلِهِ مدّةَ 15 دقيقةً؛ لذا فإنَّ أكبرَ قيمةٍ للزمنِ الذي يمثِّلُ المجالَ 15. وعليهِ، فإنَّ مجالَ الاقترانِ هُوَ [0, 15].

لإيجادِ مَدى الاقترانِ أُعَوِّضُ $m = 0$ في الاقترانِ لينتجَ $t(0) = 65$. وعليهِ، فإنَّ مَدى الاقترانِ هُوَ [65, 350].

أتعلَّمُ

بما أنَّ m تمثِّــلُ الزمنَ، فإنَّ أقلَّ قيمةٍ لهُ هيَ 0

أتعلَّمُ

يمكــنُ إيجــادُ مَــدى الاقترانِ الخطيِّ بتعويضِ أقلِّ قيمةٍ وأعلى قيمةٍ في المجالِ.

أتحقَّقُ مِنْ فهمي

يمثِّلُ الاقترانُ $d(x) = 12x$ المسافةَ d بالكيلومترِ التي تقطعُها سيّارةٌ باستعمالِ x لترٍ مِنَ الوقودِ. أَجِدُ مجالَ الاقترانِ وَمَداهُ إذا كانَ الحَدُّ الأقصى لسَعةِ خَزّانِ السيّارةِ مِنَ الوقودِ 40 L

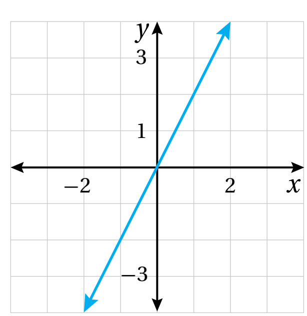
الاقترانات غيرُ الخطيَّةِ

الاقتــرانُ غيــرُ الخطــيِّ (nonlinear function) اقتــرانٌ لا يمكنُ كتابتُهُ علــى الصورةِ $f(x) = mx + b$، وتمثيلُهُ البيانيُّ ليسَ خطًّا مستقيمًا.

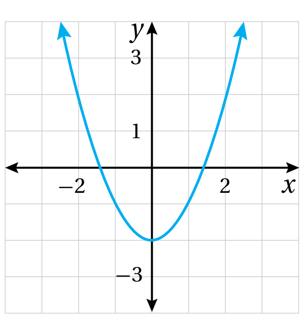
أتعلَّمُ

إذا احتوى الاقترانُ $f(x)$ على أيِّ أسٍّ غيرِ الواحدِ والصفرِ للمقــدارِ x، فإنَّ الاقترانَ غيرُ خطيٍّ.

اقترانٌ خطيٌّ



اقترانٌ غيرُ خطيٍّ



ويمكــنُ إيجــادُ قيمــةِ الاقتــرانِ غيــرِ الخطــيِّ عنــدَ قيمــةٍ معيَّنــةٍ بالتعويــضِ، ثــمَّ اتِّبــاعِ أولويــاتِ العمليــاتِ.

أولوياتُ العملياتِ الحسابيَّةِ

مراجعةُ المفهوم

أولوياتُ العملياتِ الحسابيَّةِ، هِيَ:

1) أَجِدُ قيمةَ المِقدارِ داخلَ الأقواسِ.

2) أَجِدُ قِيَمَ المقاديرِ الأُسِّيَّةِ والجُذورِ جميعَها.

3) أضرِبُ أَوْ أقسِمُ مِنَ اليسارِ إلى اليمينِ (أَيُّهُما أسبَقُ).

4) أجمعُ أَوْ أطرحُ مِنَ اليسارِ إلى اليمينِ (أَيُّهُما أسبَقُ).

مثال 6

إذا كانَ $g(x) = 2x^2 + 2x - 3$، فَأَجِدُ كُلًّا ممّا يأتي:

1 $g(-1)$

$g(x) = 2x^2 + 2x - 3$ الاقترانُ المُعطى

$g(-1) = 2(-1)^2 + 2(-1) - 3$ بتعويضِ $x = -1$

$= -3$ بالتبسيطِ

2 $3g(0) + g(2)$

$3g(0) + g(2) = 3(2(0)^2 + 2(0) - 3) + (2(2)^2 + 2(2) - 3)$ بتعويضِ $x = 0, x = 2$

$= 3(-3) + 9$ بالتبسيطِ

$= 0$ بالتبسيطِ

أتعلَّمُ

أُلاحِظُ أنَّ أُسَّ المُتغيِّرِ في الاقترانِ $g(x)$ هُوَ 2؛ لِذا فهوَ ليسَ اقترانًا خطيًّا.

أتحقَّقُ مِنْ فهمي

إذا كانَ $h(x) = x^3 - 2x + 1$، فَأَجِدُ كُلًّا ممّا يأتي:

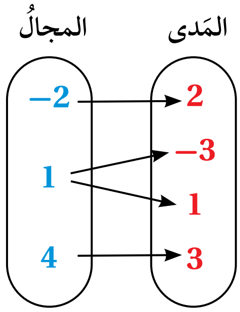
a) $h(-2)$

b) $h(1) - 4h(0)$

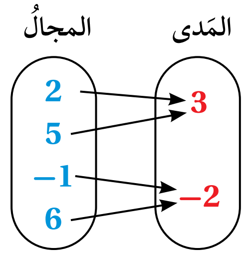
أتدرَّبُ وأحُلُّ المسائلَ

أحدِّدُ مجالَ كُلِّ علاقةٍ مِمّا يأتي ومَداها، ثمَّ أحدِّدُ ما إذا كانتْ تمثِّلُ اقترانًا أمْ لا:

1



2



3

x	4	2	−3	4	−4
y	0	−1	0	−1	0

4

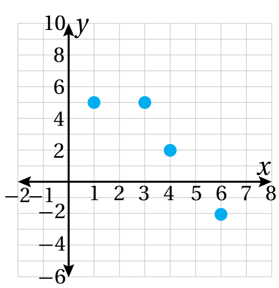
x	−2	−1	0	1	2
y	−3	−3	−3	−3	−3

5 $\{(-2, 5), (-1, 2), (0, 4), (1, -9)\}$

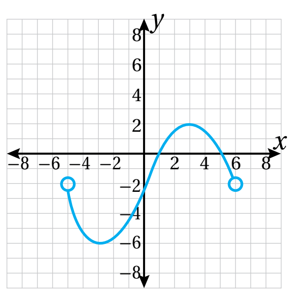
6 $\{(4, 2), (1, 1), (0, 0), (1, -1), (4, -2)\}$

أحدِّدُ ما إذا كانَ كُلُّ اقترانٍ ممّا يأتي مُنفَصِلًا أمْ مُتَّصِلًا، ثمَّ أحدِّدُ مجالَهُ وَمَداهُ:

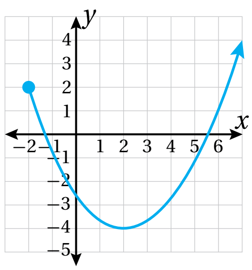
7



8

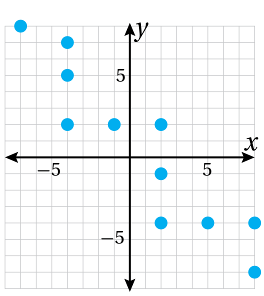


9

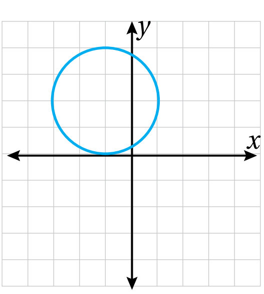


أحدِّدُ ما إذا كانَتِ العلاقةُ المُعطى تمثيلُها البيانيُّ في كُلٍّ ممّا يأتي تُمثِّلُ اقترانًا أمْ لا، وأبرِّرُ إجابتي:

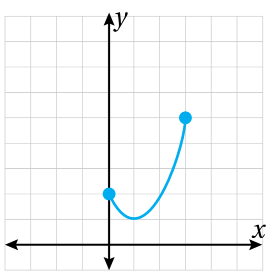
10



11



12



إذا كانَ $f(x) = 3x - 8$، فأجِدُ:

13 $f(-3)$

14 $2f(5) - 11$

15 قيمةَ x، التي تجعلُ $f(x) = 19$

إذا كانَ $h(x) = \frac{x+1}{x-1}$، فَأَجِدُ كُلًّا ممّا يأتي:

16 $h(2)$

17 $h(3)$

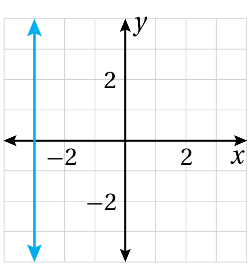
18 $2h(0) - h(-2)$

تغذيـةٌ: يمثّلُ الاقترانُ $V(c) = 98c$ عددَ وحداتِ فيتامينِ د، التي يمكنُ للإنســانِ أنْ يحصلَ عليها عندَ شربِهِ c كوبًا مِنَ الحليبِ.

19 أَجِدُ عددَ وحداتِ فيتامينِ د، التي يمكنُ للإنسانِ أنْ يحصلَ عليها عندَ شربِ 8 أكوابٍ مِنَ الحليبِ.

20 إذا كانَ الحَـدُّ الأقصى لعددِ أكـوابِ الحليبِ التي يوصي الأطباءُ المـرأةَ الحاملَ أنْ تشرَبَها 4 أكوابٍ، فَأَجِدُ مجالَ الاقترانِ وَمَداهُ.

مهاراتُ التفكيرِ العُليا



21 أكتشفُ الخطأَ: تقولُ هديلُ إنَّ التمثيلَ البيانيَّ المُجاورَ يمثّلُ اقترانًا خطيًّا؛ لأنّهُ على شكلٍ مُستقيمٍ. أكتشِفُ الخطأَ في قولِ هديلَ، وأصحّحُهُ.

تبريرٌ: أحدّدُ الجملةَ الصحيحةَ والجملةَ الخطأَ ممّا يأتي، وأبرّرُ إجابتي:

22 كُلُّ اقترانٍ هُوَ علاقةٌ.

23 كُلُّ علاقةٍ هِيَ اقترانٌ.

24 إذا كانَ مجالُ الاقترانِ $(-\infty, \infty)$، فإنَّ مَداهُ أيضًا سيكونُ $(-\infty, \infty)$.

25 تبريرٌ: أَجِدُ مجموعةَ قِيَمِ x، التي تجعلُ العلاقةَ $\{(1, 5), (x, 8), (-7, 9)\}$ اقترانًا؛ حيثُ $x \in Z$، وأبرّرُ إجابتي.

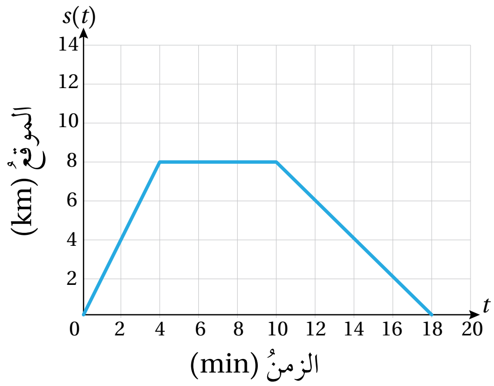
الدرس 2

تفسيرُ التمثيلاتِ البيانيَّةِ
Interpreting Graphs

فكرةُ الدرسِ تفسيرُ التمثيلاتِ البيانيّةِ للعلاقاتِ.

المصطلحاتُ مُنحنياتُ التحويلِ، مُنحنى الموقعِ – الزمنِ.

مسألةُ اليومِ يبيّنُ الشكلُ المجاورُ التمثيلَ البيانيَّ لموقعِ سيارةٍ أثناءَ حركتِها بالنسبةِ إلى نقطةِ انطلاقِها.



1) كمْ دقيقةً استمرّتْ رحلةُ السيارةِ؟

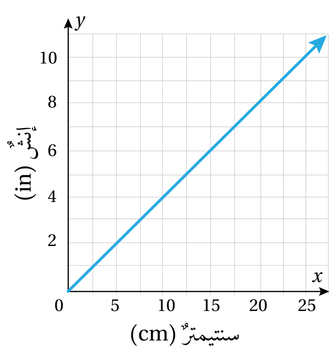
2) ما المدّةُ الزمنيةُ التي توقّفتْها السيارةُ أثناءَ الرحلةِ؟

التحويلُ بينَ وحداتِ القياسِ باستعمالِ مُنحنياتِ التحويلِ

تعلّمْتُ سابقًا التحويلَ بينَ وَحداتِ القياسِ المختلفةِ باستعمالِ علاقاتٍ خطّيةٍ تربطُ بينَها، وسأتعلّمُ اليومَ كيفيّةَ قراءةِ **مُنحنياتِ التحويلِ** (conversion graphs) وتفسيرَها، وهيَ مُنْحَنياتٌ تُستعمَلُ لتمثيلِ العلاقاتِ بينَ وَحداتِ القياسِ المختلفةِ والتحويلِ بينَها.

مثال 1

يبيّنُ مُنحنى التحويلِ المجاورُ العلاقةَ بينَ السنتيمترِ (cm) والإنشِ (in). أستعملُ المُنحنى للإجابةِ عنْ كلٍّ ممّا يأتي:



أتعلّمُ

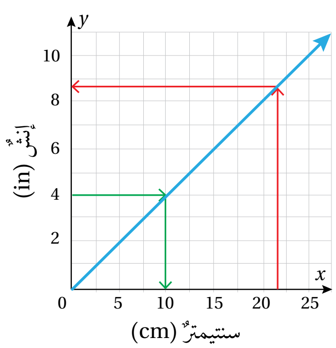
الإنشُ (inch) وَحدةُ قياسِ طولٍ تُستَخْدَمُ في بعضِ دولِ العالَمِ.

1 أحوّلُ 4 in إلى وحدةِ السنتيمترِ.

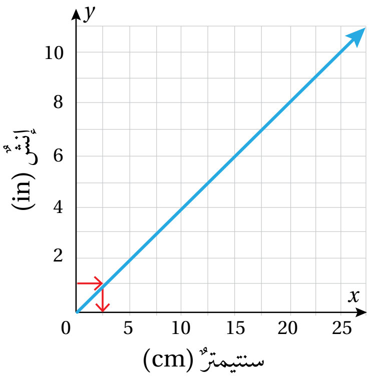
ألاحظُ منَ التمثيلِ البيانيِّ أنَّ 4 in على المحورِ y تقابلُ 10 cm على المحورِ x.

2 أحوّلُ 22 cm إلى وَحدةِ الإنشِ.

ألاحظُ منَ التمثيلِ البيانيِّ أنَّ 22 cm على المحورِ x تقابلُ 8.7 in تقريبًا على المحورِ y.



3 أُبيّنُ كيفَ أستعملُ المُنحنى المجاورَ لتحويلِ 18 in إلى سنتيمتراتٍ.



بما أنَّ 18 in غيرُ موجودةٍ علــى التمثيلِ البيانيِّ، أتّبعُ الخُطواتِ الآتيةَ للتحويلِ:

الْخُطْـوَةُ 1: أجدُ كمْ سنتيمترًا في الإنشِ الواحدِ.

ألاحظُ منَ التمثيلِ البيانيِّ أنَّ كلَّ 1 in على المحورِ y يقابلُ 2.5 cm تقريبًا على المحورِ x.

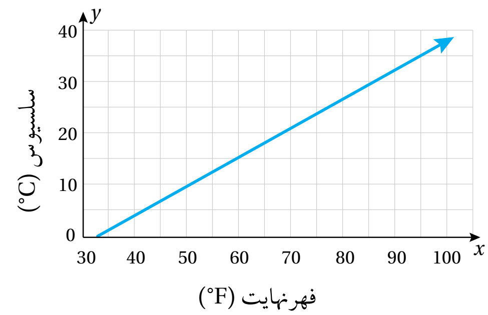
الْخُطْـوَةُ 2: أضربُ 18 in في 2.5

$$18 \times 2.5 = 45$$

إذنْ، 18 in تساوي 45 cm تقريبًا.

أتحقَّقُ مِنْ فهمي

يبيّنُ مُنحنى التحويلِ المجاورُ العلاقةَ بينَ وَحدتَيْ قياسِ درجاتِ الحرارةِ الفهرنهايت والسلسيوس. أســتعملُ المُنحنى للإجابةِ عنْ كلٍّ ممّا يأْتي:



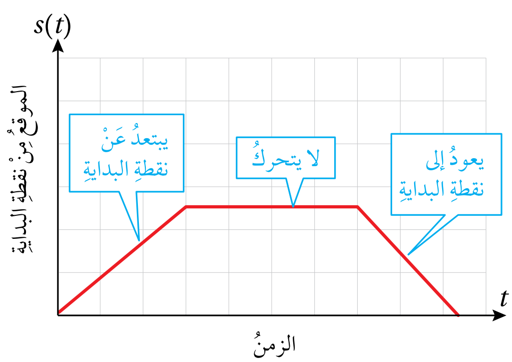
a) أحوّلُ 35° C إلى وَحدةِ الفهرنهايت.

b) أحوّلُ 50° F إلى وَحدةِ السلسيوس.

c) إذا كانتْ درجةُ حرارةِ تجمّدِ الماءِ 0° C، فما درجةُ الحرارةِ المقابلةُ لها بالفهرنهايت؟

تفسيرُ حركةِ الأجسامِ باستعمالِ مُنحنى الموقعِ- الزمنِ

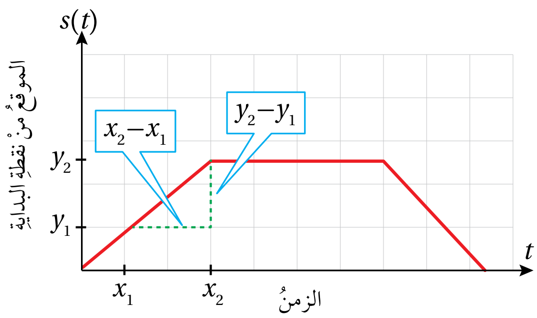
يكونُ مــنَ الصعبِ في بعضِ الأحيــانِ وصفُ حركةِ جســمٍ خلالَ مدّةٍ زمنيةٍ محدّدةٍ بالكلماتِ؛ لذلكَ تُســتعملُ المُنحنياتُ لتمثيلِ تلكَ الحركةِ بوضوحٍ. يُستعملُ **مُنحنى الموقعِ–الزمنِ** (position–time graph) لتمثيلِ التغيُّرِ في موقعِ جســمٍ مُتحرِّكٍ خلالَ مدّةٍ زمنيةٍ معينةٍ (بينَ نقطتينِ زمنيَّتينِ) كما يوضّحُ الشــكلُ المجاورُ، إذْ يظهــرُ الموقعُ منْ نقطةِ البدايةِ على المحورِ الرأسيِّ، والزمنُ على المحورِ الأفقيِّ.



تعلّمْتُ سابقًا في مبحثِ العلومِ أنهُ يمكنُ إيجادُ السرعةِ المتوسّطةِ ($\overline{v}_s$) بقسمةِ المسافةِ الكلّيةِ المقطوعةِ (S) على الزمنِ الكلّيِّ المُستغرَقِ للحركةِ (Δt)، ويمكنُ التعبيرُ عنْ ذلكَ بالرموزِ عنْ طريقِ الصيغةِ الآتيةِ:

$$\overline{v}_s = \frac{S}{\Delta t}$$

يمكنُ استعمالُ مُنحنياتِ الموقعِ – الزمنِ لإيجادِ السرعةِ المتوسّطةِ لجسمٍ، وذلكَ بقسمةِ التغيُّرِ في موقعِ الجسمِ ($y_2 - y_1$) على التغيُّرِ في الزمنِ ($x_2 - x_1$)، والتي يمكنُ التعبيرُ عنها بالرموزِ كالآتي:



$$\overline{v}_s = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

ألاحظُ أنَّ صيغةَ السرعةِ المتوسّطةِ تشبهُ صيغةَ الميلِ، إذنْ، سرعةُ الجسمِ المتوسّطةُ تساوي ميلَ مُنحنى الموقعِ – الزمنِ.

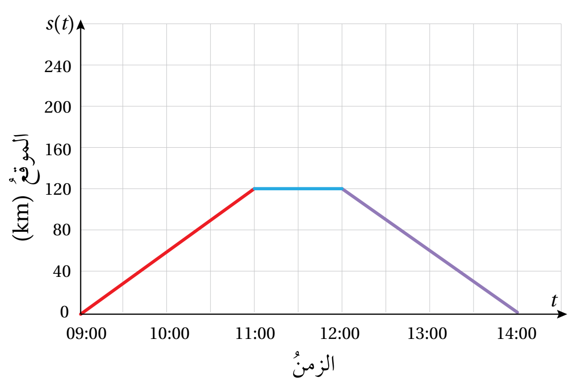
أتذكَّرُ

يمكنُ إيجادُ الميلِ (m) للمستقيمِ غيرِ الرأسيِّ المارِّ بالنقطتينِ (x_1, y_1) و (x_2, y_2) على النحوِ الآتي:

$$m = \frac{\text{التغيُّرُ الرأسيُّ}}{\text{التغيُّرُ الأفقيُّ}} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

مثال 2 : مِنَ الحياةِ

يُبيّنُ التمثيلُ البيانيُّ المجاورُ رحلةَ أحمدَ بسيارتِه منْ منزلِه إلى مطارِ الملكةِ علياءَ الدوليِّ ليستقبلَ أخاهُ العائدَ منَ السفرِ، حيثُ مكثَ بعضَ الوقتِ في المطارِ مُنتظرًا وصولَ أخيهِ، ثمَّ عادا معًا إلى المنزلِ.



1 **في أيِّ ساعةٍ غادرَ أحمدُ منزلَهُ؟**

غادرَ أحمدُ منزلَه الساعةَ 9:00 عندَما بدأَ التمثيلُ البيانيُّ الحركةَ منَ المستوى الأفقيِّ.

أتذكَّرُ

الوقتُ بصيغةِ الـ 24 ساعةً هو نظامٌ يبدأُ فيهِ اليومُ منْ منتصفِ الليلِ إلى منتصفِ الليلِ الذي يليهِ خلالَ دورةٍ واحدةٍ مكوّنةٍ مِنَ الـ 24 ساعةً اليوميةِ.

2 ما البُعدُ بينَ منزلِ أحمدَ ومطارِ الملكةِ علياءَ الدوليِّ؟

أصبحَ مُنحنى الموقعِ – الزمنِ بينَ الساعةِ 11:00 والساعةِ 12:00 أفقيًّا، ما يعني أنَّ موقعَ أحمدَ بالنسبةِ إلى منزلِهِ لَمْ يتغيّرْ في هذهِ المُدَّةِ، إذنْ يكونُ أحمدُ عندَها قَدْ وصلَ إلى المطارِ، وهذا يدلُّ على أنَّ المطارَ يبعدُ عنْ منزلِ أحمدَ 120 km

3 كمْ أمضى أحمدُ مِنَ الوقتِ في المطارِ؟

تقعُ القطعةُ الأفقيةُ منَ المُنحنى بينَ الساعةِ 11:00 والساعةِ 12:00 وطولُها يساوي الزمنَ الذي أمضاهُ أحمدُ في المطارِ. إذنْ، أمضى أحمدُ ساعةً واحدةً في المطارِ.

4 أجدُ السرعةَ المتوسّطةَ للسيارةِ في المدّةِ الزمنيةِ: 9:00–11:00

صيغةُ السرعةِ المتوسّطةِ
$$\bar{v}_s = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

أعوّضُ عن (x_1, y_1) بـ $(9, 0)$ وعن (x_2, y_2) بـ $(11, 120)$
$$= \frac{120 - 0}{11 - 9}$$

أُبسّطُ
$$= \frac{120}{2} = 60$$

إذنْ السرعةُ المتوسّطةُ للسيارةِ في المدّةِ الزمنيّةِ 11:00 – 9:00 تساوي 60 km/ h.

5 أجدُ السرعةَ المتوسّطةَ للسيارةِ في المدّةِ الزمنيّةِ 12:00–14:00، ثمَّ أُبيّنُ ماذا تمثّلُ.

صيغةُ السرعةِ المتوسّطةِ
$$\bar{v}_s = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

أعوّضُ عن (x_1, y_1) بـ $(12, 120)$ وعن (x_2, y_2) بـ $(14, 0)$
$$= \frac{0 - 120}{14 - 12}$$

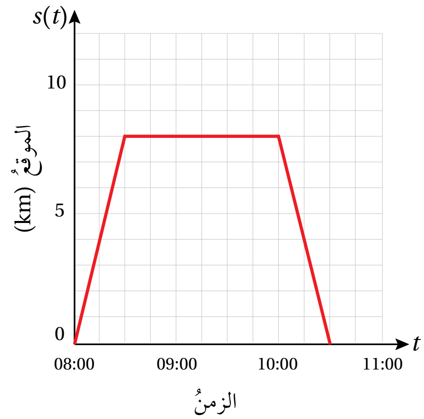
أُبسّطُ
$$= \frac{-120}{2} = -60$$

بما أنَّ السرعةَ المتوسَطةَ للسيارةِ سالبةٌ في المدّةِ الزمنيةِ 12:00–14:00 فإنَّ ذلكَ يعني أنَّ أحمدَ بدأَ بالعودةِ إلى المنزلِ الساعةَ 12:00 بسرعةٍ ثابتةٍ مقدارُها 60 km/ h، ووصلَ إلى منزلِه الساعةَ 14:00

أتذكّرُ

أثناءَ رحلةِ أحمدَ منْ منزلِهِ إلى المطارِ وعودتِهِ إلى المنزلِ مرّةً أُخرى قدْ يُسرعُ أحيانًا ويبطئُ أحيانًا أخرى؛ نتيجةَ الازدحامِ، أوِ التعبِ أوْ حالةِ الطقسِ؛ أيْ إنَّ سرعتَهُ تتغيّرُ باستمرارٍ، وهذا يعني أنَّ حركتَهُ غيرُ مُنتظَمةٍ؛ لذا فإنّنا نحسبُ سرعتَهُ المتوسّطةَ.

أتحقَّقُ مِنْ فهمي



يبيّــنُ التمثيلُ البيانيُّ المجــاورُ رحلةَ خالدٍ على درّاجتِه من منزلِه إلى المكتبةِ، حيثُ أمضى بعضَ الوقتِ فيها، ثمَّ عادَ بدرّاجتِه إلى المنزلِ.

a) في أيِّ ساعةٍ غادرَ خالدٌ منزلَهُ؟

b) ما البُعدُ بينَ منزلِ خالدٍ والمكتبةِ؟

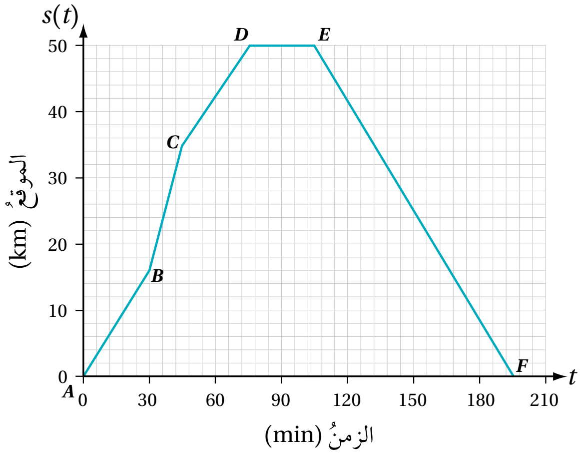
c) كمْ أمضى خالدٌ منَ الوقتِ في المكتبةِ؟

d) أجدُ السرعةَ المتوسّطةَ لخالدٍ في المدّةِ الزمنيةِ 10:00–10:30، ثمَّ أبيّنُ ماذا تمثّلُ.

يُظهِرُ مُنحنى الموقعِ – الزمنِ في المثالِ الســابقِ موقعَ جســمٍ مُتحرِّكٍ بينَ أوقاتٍ مختلفةٍ منْ ساعاتِ اليومِ. ويوجدُ أيضًا نوعٌ آخَرُ منَ المُنحنياتِ يبيّنُ موقعَ الجسمِ المُتحرِّكِ بعدَ مرورِ مدّةٍ زمنيّةٍ محدّدةٍ منْ لحظةِ انطلاقِهِ كما هو موضَّحٌ في المثالِ الآتي.

مثال 3

يمثــلُ مُنحنى الموقــعِ – الزمنِ المجاورُ رحلةَ حافلةٍ نقلتْ ركّابًا من مدينةِ إربدَ إلى مدينةِ المفرقِ؛ حيــثُ توقّفَ ســائقُ الحافلةِ في الموقفِ مدّةً مــنَ الزمنِ لتحميلِ الركّابِ، ثمَّ عادَ إلى مدينةِ إربدَ.



1 ما البُعدُ بينَ إربدَ والمفرقِ؟

أصبــحَ مُنحنى الموقعِ – الزمنِ بعــدَ ما يقاربُ 75 دقيقةً أفقيًّا، إذنْ تكــونُ الحافلةُ عندَها قد وصلتْ إلى مدينةِ المفرقِ وتوقّفتْ بعضَ الوقتِ، وهذا يدلُّ على أنَّ مدينةَ إربدَ تبعدُ عنْ مدينةِ المفرقِ 50 km

أتعلَّمُ

إذا احتــوى مُنحنــى الموقــعِ – الزمــنِ على أكثرَ منْ قطعةٍ مســتقيمةٍ، فإنَّ ذلكَ يعني أنَّ السرعةَ المتوسّطةَ للجسمِ تغيّرَتْ أكثرَ منْ مرّةٍ أثناءَ حركتِهِ، مــعَ حــدوثِ توقُّفٍ في الحركــةِ عنــدَ النقــاطِ الفاصلةِ بينَ هــذِهِ القطعِ المستقيمةِ.

2 ما المدّةُ الزمنيةُ التي انتظرَها سائقُ الحافلةِ في الموقفِ لتحميلِ الركابِ؟

بما أن المُنحنى أفقيٌّ بينَ 75 دقيقةً و105 دقائقَ منَ انطلاقِ الحافلةِ منْ إربدَ إلى المفرقِ، فهذا يعني أنَّ الحافلةَ توقَّفتْ 30 دقيقةً في المفرقِ لتحميلِ الركابِ.

3 ما زمنُ الرحلةِ كلِّها ؟

أُلاحظُ منَ المُنحنى أنَّ زمنَ الرحلةِ كلِّها 195 دقيقةً تقريبًا؛ أيْ 3 ساعاتٍ وربعٌ.

4 ماذا يمكنُنا القولُ عمّا يتعلّقُ برحلةِ الحافلةِ منَ النقطةِ E إلى النقطةِ F؟

بدأتِ الحافلةُ بالعودةِ منْ مدينةِ المفرقِ إلى مدينةِ إربدَ بينَ هاتينِ النقطتينِ، واستغرقتْ رحلةُ العودةِ 90 دقيقةً.

أتعلَّمُ

ألاحظُ أنَّ ميلَ المُنحنى ثابتٌ خلالَ هذهِ المُدَّةِ، ما يعني أنَّ السرعةَ المتوسّطةَ للحافلةِ كانت ثابتةً خلالَ رحلةِ العودةِ.

5 أحسُبُ السرعةَ المتوسّطةَ للحافلةِ بوحدةِ km / h بينَ النقطتينِ D و C.

صيغةُ السرعةِ المتوسّطةِ
$$\bar{v}_s = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

أعوّضُ عن (x_1, y_1) بـ $(45, 35)$ وعن (x_2, y_2) بـ $(75, 50)$
$$= \frac{50 - 35}{75 - 45}$$

أُبسّطُ
$$= \frac{15\text{ km}}{30\text{ min}}$$

وبما أنَّ الحافلةَ قطعَتْ 15 km في 30 min، إذن يمكنُني إيجادُ السرعةِ المتوسّطةِ للحافلةِ في الساعةِ الواحدةِ.

السرعةُ المتوسّطةُ للحافلةِ بوَحدةِ km/min
$$\frac{15\text{ km}}{30\text{ min}}$$

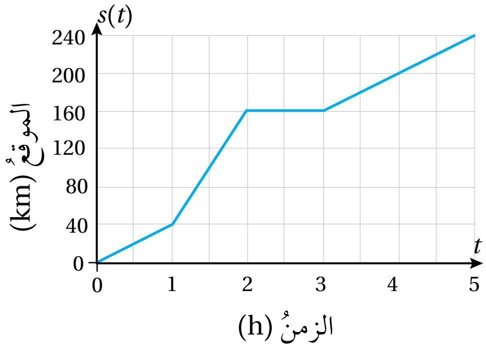
أضربُ في 2 لتحويلِ السرعةِ المتوسّطةِ للحافلةِ بوَحدةِ الكيلومترِ لكلِّ ساعةٍ
$$= \frac{15 \times 2\text{ km}}{30 \times 2\text{ min}}$$

أُبسّطُ
$$= \frac{30\text{ km}}{60\text{ min}}$$

كلُّ 60 min تساوي 1 ساعةً
$$= \frac{30\text{ km}}{1\text{ h}}$$

إذنْ، السرعةُ المتوسّطةُ للحافلةِ منْ C إلى D تساوي 30 km/h

أتحقَّقُ مِنْ فهمي



يبيّنُ التمثيلُ البيانيُّ المجاورُ رحلةَ بهاءَ بسيارتِه منْ مدينةِ الكركِ متَّجِهًا إلى عملِه في مدينةِ العقبةِ عبرَ طريقِ الغورِ الأردنيِّ.

a) ما البُعدُ بينَ مدينةِ الكركِ ومدينةِ العقبةِ؟

b) ما المدّةُ الزمنيّةُ التي استغرقَها بهاءٌ لأخذِ استراحةٍ أثناءَ الرحلةِ؟

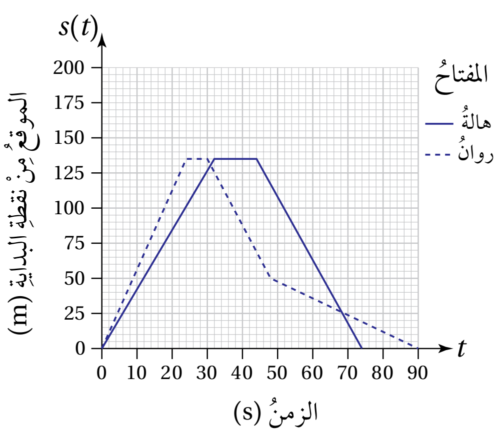
c) أحسُبُ السرعةَ المتوسّطةَ للسيارةِ منذُ تحرّكَ بهاءٌ بعدَ الاستراحةِ وحتّى وصولِهِ إلى مدينةِ العقبةِ.

d) إذا وصلَ بهاءُ مدينةَ العقبةِ الساعةَ 1 p.m.، ففي أيِّ ساعةٍ انطلقَ منْ مدينةِ الكركِ؟

المقارنةُ بينَ جسمينِ تحرّكا معًا باستعمالِ مُنحنى الموقعِ- الزمنِ

يمكنُ رسمُ مُنحنى الموقعِ – الزمنِ لجسمَينِ مُتحرِّكَينِ معًا على المستوى نفسِهِ، وذلكَ بهدفِ إجراءِ مُقارَناتٍ بينَ الجسمَينِ منْ حيثُ الموقعُ، والزمنُ، والسرعةُ المتوسّطةُ.

مثال 4



يبيّنُ التمثيلُ البيانيُّ المجاورُ سباقًا بينَ روانَ وهالةَ، حيثُ ركَضَتا إلى نهايةِ الطريقِ المُحاذي لمنزلِهما، وأخذَتْ كلٌّ منهُما استراحةً قصيرةً، ثمَّ عادَتا ركضًا إلى نقطةِ البدايةِ، وفي طريقِ العودةِ الْتَوى كاحلُ روانَ.

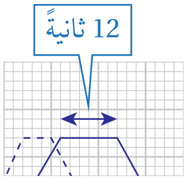
1 **أيُّهما أنهتِ السباقَ بوقتٍ أقصرَ: روانُ أمْ هالةُ؟ ولماذا؟**

أنهتْ هالةُ السباقَ أوّلًا، حيثُ يظهرُ منَ التمثيلِ البيانيِّ أنَّ مُنحنى هالةَ عادَ إلى المحورِ x قبلَ مُنحنى روانَ، حيثُ أنهتْ هالةُ السباقَ في 75 ثانيةً تقريبًا، في حينِ أنهتْ روانُ السباقَ في 90 ثانيةً.

أتعلَّمُ

أقرأُ مقياسَ الرسمِ للتمثيلِ البيانيِّ جيدًا، وألاحظُ أنَّ كلَّ مربعٍ صغيرٍ يمثلُ ثانيتينِ.

2 **ما مقدارُ الوقتِ الذي استراحتْ فيهِ هالةُ؟**



ألاحظُ أنَّ كلَّ خطوةٍ أفقيّةٍ في المستوى الإحداثيِّ تمثلُ ثانيتينِ؛ لذا استراحتْ هالةُ مدةَ 12 ثانيةً كما يظهرُ في الشكلِ المجاورِ.

3 **بعدَ كم ثانيةً من بدءِ السباقِ التوى كاحلُ روانَ؟**

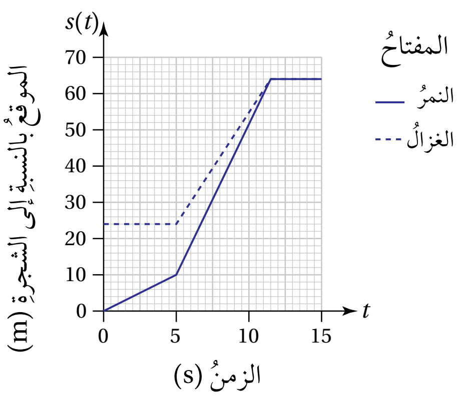
التوى كاحلُ روانَ بعدَ 48 ثانيةً؛ لأنَّ سرعتَها قلَّتْ فجأةً عندَ الثانيةِ 48، ويظهرُ ذلكَ في التمثيلِ البيانيِّ، إذْ قلَّ ميلُ المُنحنى بعدَ الثانيةِ 48.

4 **ماذا حدثَ بعدَ 68 ثانيةً منْ بدءِ السباقِ؟**

ألاحظُ أنَّ المُنحنيَينِ تقاطعَا في الثانيةِ 68، وهذا يدلُّ على أنَّ هالةَ وروانَ كانَتا على البعدِ نفسِه منْ نقطةِ البدايةِ/ النهايةِ في تلكَ اللحظةِ.

أتحقَّقُ مِنْ فهمي

رصدَ نَمِرٌ غزالًا عندَما كانَ أسفلَ شجرةٍ، ثمَّ بدأَ بمطاردةِ الغزالِ حتى اصطادَهُ. يبيّنُ التمثيلُ البيانيُّ الآتي المطاردةَ بينَ النّمِرِ والغزالِ.



a) كم كانَ البُعدُ بينَ الغزالِ والنّمرِ عندَ بَدْءِ المطاردةِ؟

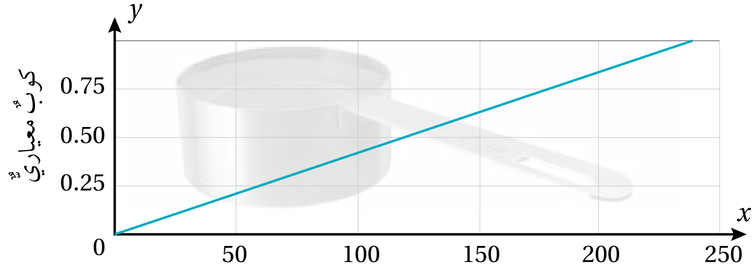
b) ماذا فعلَ الغزالُ بينَ الثانيةِ 0 والثانيةِ 5؟

c) كمْ ثانيةً ركضَ الغزالُ قبلَ أنْ يصطادَهُ النّمرُ؟

d) كيفَ أستدِلُّ منَ التمثيلِ البيانيِّ على أنَّ النمرَ أسرعُ منَ الغزالِ؟

أتدرَّبُ وأحُلُّ المسائلَ

يبيّنُ مُنحنى التحويلِ الآتي العلاقةَ بينَ المليلترِ ووَحدةِ الكوبِ المعياريِّ الذي يُستَعملُ لقياسِ الكمياتِ في الطبخِ.



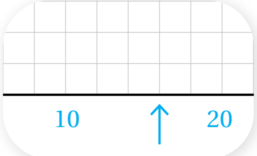
1 كمْ مليلترًا منَ السائلِ يقابلُ الكوبَ المعياريَّ الواحدَ؟

2 كمْ كوبًا معياريًّا يقابلُ 150 mL؟

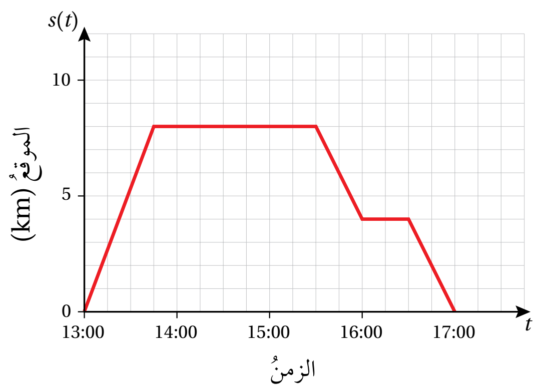
3 كمْ مليلترًا منَ السائلِ تحتاجُ إليهِ وصفةٌ تتطلّبُ كوبًا ونصفًا.

أتعلَّمُ

عندَما أقرأُ التمثيلَ البيانيَّ أحدّدُ مقياسَ الرسمِ أولًا؛ لمعرفةِ ما يمثلُه كلُّ مربعٍ في المستوى الإحداثيِّ، ويمكنُ التحقُّقُ منْ ذلكَ بالعدِّ. فمثلًا يشيرُ السهمُ في الشكلِ أدناهُ إلى العددِ 16



يبيّنُ التمثيلُ البيانيُّ المجاورُ رحلةَ زيدٍ على دراجتِه منْ منزلِه إلى المَرْكَزِ الثقافيِّ، وفي طريقِ عودتِه إلى المنزلِ توقَّفَ عندَ أحدِ المحالِّ التجاريةِ.



4 في أيِّ ساعةٍ غادرَ زيدٌ المنزلَ؟

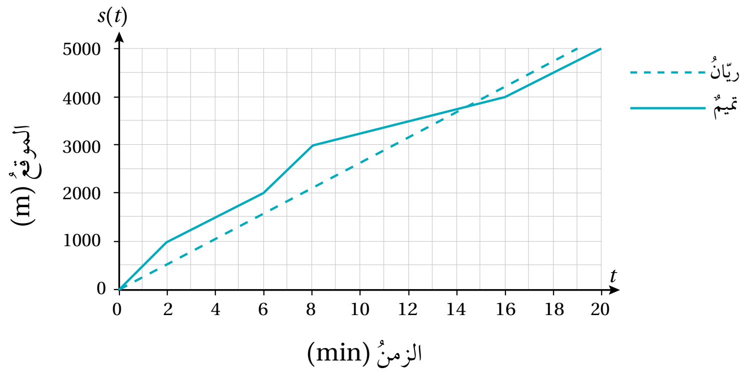
5 كمْ كيلومترًا يبعدُ المركزُ الثقافيُّ عَنْ منزلِ زيدٍ؟

6 كمْ كيلومترًا يبعدُ المحلُّ التجاريُّ عنْ منزلِ زيدٍ؟

7 كمْ أمضى زيدٌ منَ الوقتِ في المركزِ الثقافيِّ؟

8 أجدُ السرعةَ المتوسطةَ لزيدٍ في المدّةِ الزمنيةِ 15:30–16:00

شاركَ تميمٌ وريّانُ في سباقِ الجري لمسافةِ 5000 m، ويبيّنُ الشكلُ المجاورُ موقعَ كلٍّ منهُما بالنسبةِ إلى نقطةِ البدايةِ.

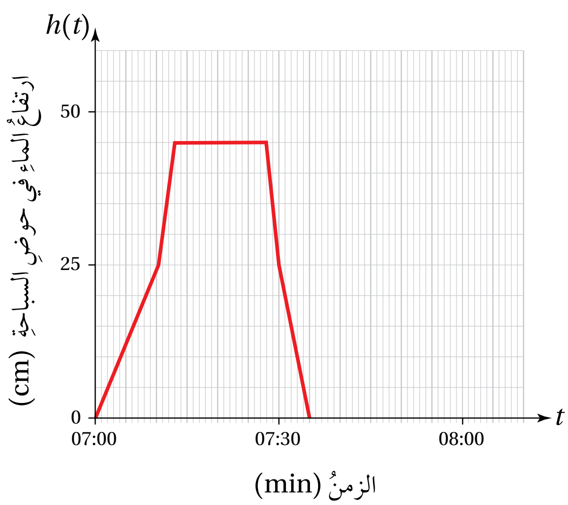


9 أيُّهُما ركضَ بسرعةٍ متوسّطةٍ ثابتةٍ؛ تميمٌ أم ريّانُ؟ أبرّرُ إجابتِي.

10 أجدُ السرعةَ المتوسّطةَ لريّانَ خلالَ السباقِ كاملًا.

11 مَنْ فازَ بالسباقِ؛ ريّانُ أم تميمٌ؟ أبرّرُ إجابتِي.

ملأَ كمالٌ حوضَ استحمامٍ بالماءِ، وعندَما أصبحتْ فيهِ كميّةٌ مناسبةٌ منَ الماءَ نزلَ فيهِ مدةً زمنيةً معينةً، ثمَّ خرجَ وأفرغَ الحوضَ منَ الماءِ. يبيّنُ التمثيلُ البيانيُّ المجاورُ ارتفاعَ الماءِ في الحوضِ خلالَ هذهِ المدّةِ.



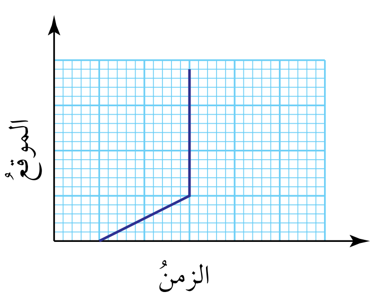
12 ما ارتفاعُ الماءِ في الحوضِ قبلَ نزولِ كمالٍ فيهِ؟

13 ما ارتفاعُ الماءِ في الحوضِ عندَما نزلَ كمالٌ فيهِ؟

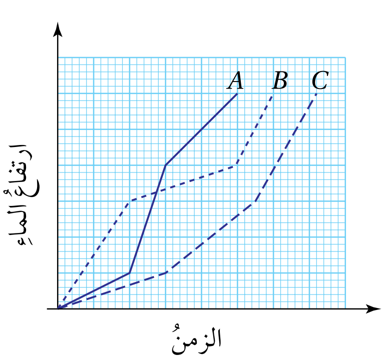
14 كمْ دقيقةً أمضى كمالٌ في الحوضِ؟

مهاراتُ التفكيرِ العُليا

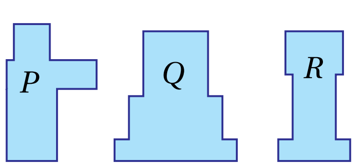
15 **تبريرٌ:** لماذا لا يمكنُ أنْ يكونَ أيُّ جزءٍ منْ مُنحنى الموقعِ – الزمنِ رأسيًّا كما هو مبيَّنٌ في الشكلِ المجاورِ؟ أبرّرُ إجابتِي.



16 **تبريرٌ:** يتدفّقُ الماءُ بمعدَّلٍ ثابتٍ ومتساوٍ في ثلاثةِ أنابيبَ تتصلُ بالأوعيةِ R وَ Q وَ P المُبيَّنةِ أدناهُ لِمَلْئِها، ويوضّحُ التمثيلُ البيانيُّ المجاورُ ارتفاعَ الماءِ في كلِّ وعاءٍ معَ مرورِ الزمنِ.



أصلُ المُنْحَنياتِ A و B و C بالوعاءِ المناسبِ لكلٍّ منها، وأبرّرُ إجابتِي.



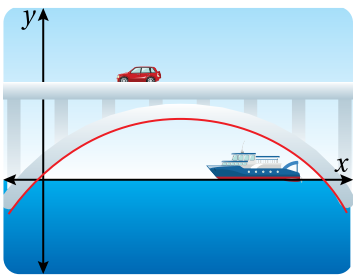
الدرس 3

الاقترانُ التربيعيُّ
Quadratic Function

فكرةُ الدرسِ
- تعرُّفُ الاقترانِ التربيعيِّ وخصائصِهِ.
- تمثيلُ الاقترانِ التربيعيِّ بيانيًّا في المُستوى الإحداثيِّ.

المصطلحاتُ الاقترانُ التربيعيُّ، الصورةُ القياسيَّةُ، الاقترانُ الرئيسُ، قطعٌ مُكافِئ، محورُ التَّماثُلِ، الرأسُ، نقطةُ القيمةِ الصُّغرى، نقطةُ القيمةِ العُظمى.

مسألةُ اليومِ يمثِّلُ الاقترانُ $f(x) = -0.007x^2 + 0.51x + 0.8$ ارتفاعَ دعامةِ جسرٍ على شكلِ قوسٍ عَنْ سطحِ الماءِ بالأمتارِ؛ حيثُ x المسافةُ الأفقيَّةُ مِنْ نقطةِ التقاءِ الدعامةِ اليسرى معَ سطحِ الماءِ. هلْ يمكنُ أنْ تمرَّ سفينةٌ ارتفاعُها 8 m أسفلَ الجسرِ؟ أبرِّرُ إجابتي.



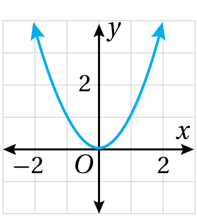
خصائصُ الاقترانِ التربيعيِّ

الاقترانُ التربيعيُّ (quadratic function) اقترانٌ يمكنُ كتابتُهُ علَى الصورةِ $f(x) = ax^2 + bx + c$؛ حيثُ a وb وc أعدادٌ حقيقيَّةٌ، وَ $a \neq 0$، الَّتي تُسَمّى **الصورةَ القياسيَّةَ** (standard form) للاقترانِ التربيعيِّ، وَمِنْ أمثلتِهِ:

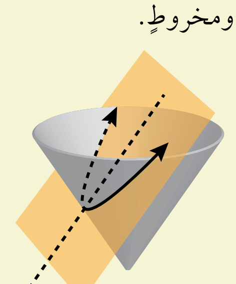
$$f(x) = 4x^2 + 3x + 1 \qquad g(x) = x^2 - 2x \qquad h(x) = 3x^2$$

يُعَدُّ الاقترانُ $f(x) = x^2$ أبسطَ صورِ الاقترانِ التربيعيِّ؛ لِذا يُسَمّى **الاقترانَ الرئيسَ** (parent function) لعائلةِ الاقتراناتِ التربيعيَّةِ.

يأخذُ التمثيلُ البيانيُّ للاقترانِ التربيعيِّ شكلَ الحرفِ الإنجليزيِّ U، ويُسمّى **قطعًا مُكافِئًا** (parabola)، كما في الشكلِ المُجاورِ، الذي يُظهِرُ التمثيلَ البيانيَّ للاقترانِ $f(x) = x^2$.



أتعلَّمُ
يَنتُجُ القطعُ المكافئُ مِنْ تقاطعِ مُستوًى مائلٍ ومخروطٍ.

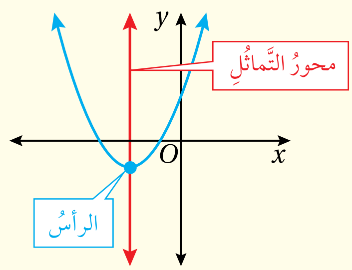


محورُ التَّماثُلِ (axis of symmetry) هُوَ المُستقيمُ الرأسيُّ الذي يقسِمُ القطعَ المُكافِئَ إلى جُزأينِ مُتطابقَيْنِ، ويقطعُهُ في نقطةٍ واحدةٍ تُسَمّى **الرأسَ** (vertex).

مفهومٌ أساسيٌّ **محورُ تَماثُلِ الاقترانِ التربيعيِّ ورأسُهُ**

مُعادلةُ محورِ التَّماثُلِ لِمُنحنى الاقترانِ التربيعيِّ $f(x) = ax^2 + bx + c$؛ حيثُ $a \neq 0$ هِيَ $x = -\frac{b}{2a}$، وإحداثيّا رأسِهِ هما:

$$\left(-\frac{b}{2a}, f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$$



مثال 1

أَجِدُ مُعادلةَ محورِ التَّماثُلِ، وإحداثيَّيْ رأسِ الاقترانِ التربيعيِّ $f(x) = 5x^2 - 10x + 4$

بما أنَّ $a = 5$ و $b = -10$، فيمكنُ إيجادُ مُعادلةِ محورِ التَّماثُلِ كالآتي:

$x = -\frac{b}{2a}$ مُعادلةُ محورِ التَّماثُلِ

$= -\frac{-10}{2(5)}$ بتعويضِ $a = 5, b = -10$

$= 1$ بالتبسيطِ

إذنْ، مُعادلةُ محورِ التَّماثُلِ هِيَ: $x = 1$

لإيجادِ إحداثِيَّي الرأسِ، أعدُّ القيمةَ الناتجةَ عَـنْ مُعادلةِ محورِ التَّماثُلِ هِيَ الإحداثيُّ x لرأسِ القطعِ المُكافِئِ، ثمَّ أعوّضُها في قاعدةِ الاقترانِ لإيجادِ الإحداثيِّ y.

$f(x) = 5x^2 - 10x + 4$ الاقترانُ المُعطى

$f(1) = 5(1)^2 - 10(1) + 4$ بتعويضِ $x = 1$

$= -1$ بالتبسيطِ

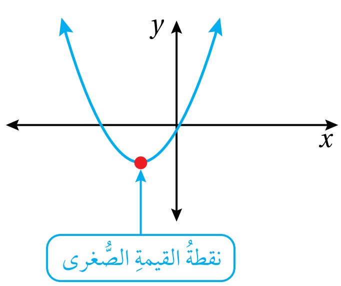
إذنْ، إحداثيّا الرأسِ $(1, -1)$

أتحقَّقُ مِنْ فهمي

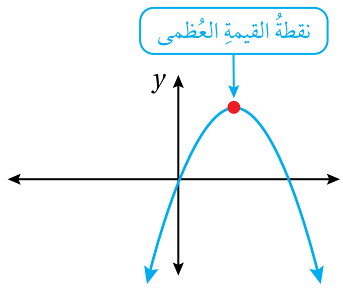
أَجِدُ مُعادلةَ محورِ التَّماثُلِ، وإحداثيَّيْ رأسِ الاقترانِ التربيعيِّ $f(x) = x^2 + 2x - 1$

يكونُ التمثيلُ البيانيُّ للاقترانِ التربيعيِّ $f(x) = ax^2 + bx + c$؛ حيثُ $a \neq 0$، مفتوحًا للأعلى إذا كانَ $a > 0$، وَتُسمّى أدنى نقطةٍ فيهِ **نقطةَ القيمةِ الصُّغرى** (minimum point)، ويكونُ مفتوحًا للأسفلِ إذا كانَ $a < 0$، وَتُسمّى أعلى نقطةٍ فيهِ **نقطةَ القيمةِ العُظمى** (maximum point)، وتمثّلُ نقطةُ القيمةِ الصُّغرى أوْ نقطةُ القيمةِ العُظمى رأسَ القطعِ المُكافِئِ.

$a > 0$



$a < 0$



لغةُ الرِّياضياتِ

يُشيرُ مُصطلحُ نقطةِ القيمةِ العُظمى إلى النقطةِ (x, y)، أمّا مُصطلحُ القيمةِ العُظمى فَيُشيرُ إلى الإحداثيِّ y لنقطةِ القيمةِ العُظمى، وكذلكَ الأمرُ بالنسبةِ إلى نقطةِ القيمةِ الصُّغرى.

مفهومٌ أساسيٌّ — **مجالُ الاقترانِ التربيعيِّ ومَداهُ**

مجالُ الاقترانِ التربيعيِّ $f(x) = ax^2 + bx + c$؛ حيثُ $a \neq 0$، هُوَ جميعُ الأعدادِ الحقيقيَّةِ، أمّا مَداهُ فيكونُ:

- مجموعةَ الأعدادِ الحقيقيَّةِ التي تزيدُ عَلى القيمةِ الصُّغرى أوْ تُساويها إذا كانَ $a > 0$.
- مجموعةَ الأعدادِ الحقيقيَّةِ التي تقلُّ عَنِ القيمةِ العُظمى أوْ تُساويها إذا كانَ $a < 0$.

مثال 2

أَجِدُ القيمةَ العُظمى أوِ الصُّغرى والمجالَ والمَدى واتِّجاهَ الفتحةِ لِكُلِّ قطعٍ مُكافِئٍ ممّا يأتي:

1) $f(x) = x^2 + 6x + 9$

في الاقترانِ $f(x)$: $a = 1, b = 6$

بما أنَّ $a > 0$ فالتمثيلُ البيانيُّ للاقترانِ التربيعيِّ يكونُ مفتوحًا للأعلى، ويكونُ للاقترانِ قيمةٌ صُغرى يمكنُ إيجادُها كالآتي:

الخطوةُ 1: أَجِدُ الإحداثِيَّ x للرأسِ.

$x = -\frac{b}{2a}$ الإحداثِيُّ x للرأسِ

$= -\frac{6}{2(1)}$ بتعويضِ $a = 1, b = 6$

$= -3$ بالتبسيطِ

الخطوةُ 2: أَجِدُ الإحداثِيَّ y للرأسِ.

$f(x) = x^2 + 6x + 9$ الاقترانُ المُعطى

$f(-3) = (-3)^2 + 6(-3) + 9$ بتعويضِ $x = -3$

$= 0$ بالتبسيطِ

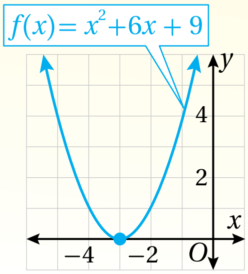
إذنْ، القيمةُ الصُّغرى للاقترانِ هِيَ 0

المجالُ: جميعُ الأعدادِ الحقيقيَّةِ أوِ الفترةِ $(-\infty, \infty)$.

المَدى: $\{y \mid y \geq 0\}$ أوِ الفترةِ $[0, \infty)$.

الدَّعمُ البيانيُّ

يُظهِرُ التمثيلُ البيانيُّ للاقترانِ $f(x) = x^2 + 6x + 9$ أَنَّهُ مفتوحٌ للأعلى ورأسُهُ النقطةُ $(-3, 0)$.



2 $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + x + 4$

في الاقترانِ $f(x)$: $a = -\frac{1}{2}, b = 1$

بما أنَّ $a < 0$، فالتمثيلُ البيانيُّ للاقترانِ التربيعيِّ يكونُ مفتوحًا للأسفلِ، ويكونُ للاقترانِ قيمةٌ عُظمى يمكنُ إيجادُها كالآتي:

الخطوةُ 1: أَجِدُ الإحداثِيَّ x للرأسِ.

$x = -\frac{b}{2a}$ الإحداثِيُّ x للرأسِ

$= -\frac{1}{2(-\frac{1}{2})}$ بتعويضِ $a = -\frac{1}{2}, b = 1$

$= 1$ بالتبسيطِ

الخطوةُ 2: أَجِدُ الإحداثِيَّ y للرأسِ.

الاقترانُ المُعطى $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + x + 4$

بتعويضِ $x = 1$ $f(1) = -\frac{1}{2}(1)^2 + 1 + 4$

بالتبسيطِ $= 4\frac{1}{2}$

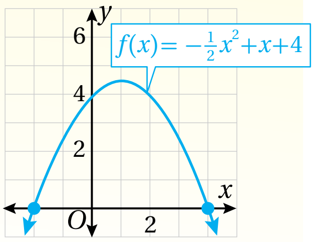
إذنْ، القيمةُ العُظمى للاقترانِ هِيَ $4\frac{1}{2}$

المجالُ: جميعُ الأعدادِ الحقيقيَّةِ أوِ الفترةِ $(-\infty, \infty)$.

المَدى: $\{y \mid y \leq 4\frac{1}{2}\}$ أوِ الفترةِ $(-\infty, 4\frac{1}{2}]$.

الدَّعمُ البيانيُّ

يُظهِرُ التمثيلُ البيانيُّ للاقترانِ $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + x + 4$ أَنَّهُ مفتوحٌ للأسفلِ ورأسُهُ النقطةُ $(1, 4\frac{1}{2})$.



أتحقَّقُ مِنْ فهمي

أَجِدُ القيمةَ العُظمى أوِ الصُّغرى والمجالَ والمَدى واتِّجاهَ الفتحةِ لِكُلِّ قطعٍ مُكافِئٍ ممّا يأتي:

a) $f(x) = 2x^2 - 2x + 8$

b) $f(x) = -3x^2 + 12x + 9$

للاقتراناتِ التربيعيَّةِ تطبيقاتٌ حياتيَّةٌ كثيرةٌ، منها الألعابُ الناريَّةُ، التي تتكوَّنُ مِنْ أُنبوبٍ يحتوي عَلى البارودِ ومجموعةٍ مِنَ الأغلفةِ الصغيرةِ تُسَمّى كُلٌّ منها نجمةٌ، وعندَ إشعالِ الفتيلِ تنطلقُ النُّجومُ إلى الأعلى لِيَنفَجِرَ كُلُّ نجمٍ عندَ ارتفاعٍ مُعيَّنٍ، ويَرسُمُ الضَّوءُ الناتجُ عَنِ انفجارِ النَّجمِ في الجَوِّ قطعًا مُكافِئًا.

مثال 3 : مِنَ الحياةِ

ألعابٌ ناريَّةٌ: يمثِّلُ الاقترانُ $h(t) = -16t^2 + 72t + 520$ ارتفاعَ نجمةِ ألعابٍ ناريَّةٍ عنْ سطحِ الأرضِ بالأمتارِ، بعدَ t ثانيةً مِنَ انفجارِها.

معلومةٌ

تحتوي اللعبةُ الناريَّةُ على فتيلٍ يُشعِلُ البارودَ، وعندما تسخنُ الموادُّ الكيميائيَّةُ تمتصُّ ذرّاتُها الطاقةَ فَتَنْتُجُ الأضواءُ، لِتَفْقِدَ الذرّاتُ طاقتَها الزائدةَ. وتختلفُ كميّاتُ الطاقةِ والألوانُ تبعًا لاختلافِ الموادِّ الكيميائيَّةِ المُستخدَمةِ.

1 **أَجِدُ الارتفاعَ الذي انفجرتْ عندَهُ النجمةُ في الجوِّ.**

الزمنُ الذي تنفجرُ عندهُ النجمةُ في الجَوِّ هُوَ $t = 0$

$h(t) = -16t^2 + 72t + 520$ الاقترانُ المُعطى

$h(0) = -16(0)^2 + 72(0) + 520$ بتعويضِ $t = 0$

$= 520$ بالتبسيطِ

إذنْ، انفجرَتِ النجمةُ على ارتفاعِ 520 m مِنْ سطحِ الأرضِ.

2 **أَجِدُ أقصى ارتفاعٍ تصلُ إليهِ النّجمةُ.**

يصلُ النجمُ إلى أقصى ارتفاعٍ لهُ عندَ رأسِ القطعِ المكافئِ؛ لِذا أَجِدُ القيمةَ العُظمى للقطعِ.

الخطوةُ 1: أَجِدُ الإحداثِيَّ t للرأسِ.

$t = -\frac{b}{2a}$ الإحداثِيُّ t للرأسِ

$= -\frac{72}{2(-16)}$ بتعويضِ $a = -16, b = 72$

$= 2.25$ بالتبسيطِ

الخطوةُ 2: أَجِدُ الإحداثِيَّ y للرأسِ.

$h(t) = -16t^2 + 72t + 520$ الاقترانُ المُعطى

$h(2.25) = -16(2.25)^2 + 72(2.25) + 520$ بتعويضِ $t = 2.25$

$= 601$ بالتبسيطِ

إذنْ، أقصى ارتفاعٍ تصلُ إليهِ النجمةُ 601 m

أتحقَّقُ مِنْ فهمي

كرةُ قدمٍ: يمثّلُ الاقترانُ $h(t) = -16t^2 + 64t$ ارتفاعَ كرةِ قدمٍ عنْ سطحِ الأرضِ بالأقدامِ، بعدَ t ثانيةً مِنْ ركلِها.

a) أَجِدُ ارتفاعَ الكرةِ بعدَ 3 ثوانٍ مِنْ ركلِها.

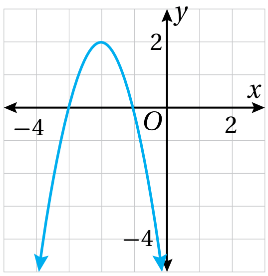
b) أَجِدُ أقصى ارتفاعٍ تصلُ إليهِ الكرةُ.

تحديدُ خصائصِ الاقترانِ التربيعيِّ مِنْ تمثيلِهِ البيانيِّ

تعلَّمتُ في المثالَيْنِ السابقَيْنِ تحديدَ خصائصِ الاقترانِ التربيعيِّ مِنْ قاعدتِهِ، وسأتعلَّمُ في هذا المثالِ تحديدَ خصائصِهِ مِنْ تمثيلِهِ البيانيِّ.

مثال 4

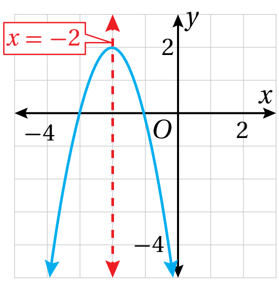
أَجِدُ إحداثيّي الرأسِ ومعادلةَ محورِ التماثلِ، وَالقيمةَ العُظمى أوِ الصُّغرى والمجالَ والمَدى للقطعِ المُكافِئِ المُمَثَّلِ بيانيًّا في المُستوى الإحداثيِّ المُجاورِ:



الخطوةُ 1: أَجِدُ إحداثيَّي الرأسِ.

بما أنَّ القطعَ مفتوحٌ للأسفلِ فالرأسُ يمثِّلُ نقطةَ العُظمى، وهي $(-2, 2)$.

الخطوةُ 2: أَجِدُ مُعادلةَ محورِ التَّماثُلِ.



بما أنَّ محورَ التَّماثُلِ هُوَ المُستقيمُ الذي يقسِمُ القطعَ المُكافِئَ إلى جزأيْنِ متطابقَيْنِ، ويقطعُ القطعَ المُكافِئَ في الرأسِ، فإنَّ مُعادلةَ محورِ التَّماثُلِ هِيَ $x = -2$

الخطوةُ 3: أَجِدُ القيمةَ العُظمى.

بما أنَّ القيمةَ العُظمى هِيَ الإحداثيُّ y لنقطةِ الرأسِ، فإنَّ القيمةَ العُظمى للاقترانِ هِيَ 2

الخطوةُ 4: أَجِدُ المجالَ وَالمَدى.

المجالُ: جميعُ الأعدادِ الحقيقيَّةِ أوِ الفترةِ $(-\infty, \infty)$.

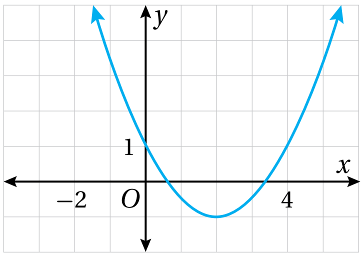
المَدى: $\{y \mid y \leq 2\}$ أوِ الفترةِ $(-\infty, 2]$.

أتذكَّرُ

الإحداثيُّ x للرأسِ هُوَ نفسُهُ العددُ الذي يَظهَرُ في مُعادلةِ محورِ التَّماثُلِ.

أتحقَّقُ مِنْ فهمي

أَجِدُ إحداثيّي الرأسِ ومعادلةَ محورِ التماثلِ، وَالقيمةَ العُظمى أوِ الصُّغرى والمجالَ والمَدى للقطعِ المُكافِئِ المُمَثَّلِ بيانيًّا في المُستوى الإحداثيِّ المُجاورِ:



تمثيلُ الاقترانِ التربيعيِّ بيانيًّا

يمكنُ استعمالُ خصائصِ الاقترانِ التربيعيِّ لتمثيلِهِ بيانيًّا.

مفهومٌ أساسيٌّ **تمثيلُ الاقترانِ التربيعيِّ بيانيًّا**

لتمثيلِ الاقترانِ التربيعيِّ بيانيًّا، أتَّبعُ الخُطواتِ الآتيةَ:

الخطوةُ 1: أحــدِّدُ اتِّجاهَ فتحةِ القطعِ المُكافِئِ، وَأَجِدُ مُعادلــةَ محورِ التَّماثُلِ وإحداثيَّي الرأسِ، وأحدِّدُ إذا كانَ يمثِّلُ نقطةً صُغرى أمْ نقطةً عُظمى.

الخطوةُ 2: أَجِدُ نقطةَ تقاطعِ الاقترانِ معَ المحورِ y.

الخطوةُ 3: أَجِدُ نقطةً أُخــرى باختيارِ قيمةٍ لـِ x تقعُ في الجانبِ الذي يقعُ فيهِ المقطعُ y يمينَ محورِ التَّماثُلِ أوْ يسارَهُ.

الخطوةُ 4: أمثِّــلُ رأسَ القطعِ والنقطتَيْــنِ اللتَيْنِ أوجدتُهُما مِــنَ الخُطوتَيْنِ 2 وَ 3، ثمَّ أســتعملُ التَّماثُــلَ لأعكِسَ النقطتَيْنِ مِــنَ الخُطوتَيْــنِ 2 وَ 3 حولَ محورِ التَّماثُلِ؛ لإيجادِ نقطتَيْنِ أُخرَيَيْنِ عَلى التَّمثيلِ البيانِيِّ.

الخطوةُ 5: أصلُ بينَ النقاطِ بِمُنحنًى أملَسَ.

إرشادٌ

يمكــنُ أخــذُ أيِّ نقطتَينِ فــي أيِّ جهةٍ مِــنْ محورِ التَّماثُــلِ وإيجادُ انعكاسٍ لكلٍّ منهُما.

مثال 5

أمثِّلُ الاقترانَ: $f(x) = -3x^2 + 6x + 5$ بيانيًّا.

الخطوةُ 1: أحــدِّدُ اتِّجاهَ فتحةِ القطعِ المُكافِئِ، وَأَجِدُ مُعادلةَ محورِ التَّماثُلِ وإحداثيَّي الرأسِ، وأحدِّدُ إذا كانَ يمثِّلُ نقطةً صُغرى أمْ نقطةً عُظمى.

في الاقترانِ $f(x)$: $a = -3, b = 6$

بمــا أنَّ $a < 0$، فالتمثيلُ البيانيُّ للقطعِ المُكافِئِ يكونُ مفتوحًا للأســفلِ، ويمثِّلُ الرأسُ نقطتَهُ العُظمى.

- **أَجِدُ مُعادلةَ محورِ التَّماثُلِ.**

مُعادلةُ محورِ التَّماثُلِ $x = -\frac{b}{2a}$

بتعويضِ $a = -3, b = 6$ $= -\frac{6}{2(-3)}$

بالتبسيطِ $= 1$

إذنْ، مُعادلةُ محورِ التَّماثُلِ هِيَ $x = 1$.

- **أَجِدُ إحداثِيَّي الرأسِ.**

الاقترانُ المُعطى $f(x) = -3x^2 + 6x + 5$

بتعويضِ $x = 1$ $f(1) = -3(1)^2 + 6(1) + 5$

بالتبسيطِ $= 8$

إذنْ، إحداثِيّا الرأسِ $(1, 8)$.

الخطوةُ 2: أَجِدُ نقطةَ تقاطعِ الاقترانِ معَ المحورِ y.

لإيجادِ نقطةِ تقاطعِ الاقترانِ معَ المحورِ y، أُعَوِّضُ $x = 0$ في قاعدةِ الاقترانِ.

الاقترانُ المُعطى $f(x) = -3x^2 + 6x + 5$

بتعويضِ $x = 0$ $f(0) = -3(0)^2 + 6(0) + 5$

بالتبسيطِ $= 5$

إذنْ، نقطةُ تقاطعِ الاقترانِ معَ المحورِ y هِيَ $(0, 5)$.

الخطوةُ 3: أَجِدُ نقطةً أُخرى باختيارِ قيمةٍ لِـ x تقعُ في الجانبِ الذي يقعُ فيهِ المقطعُ y يمينَ محورِ التَّماثُلِ أوْ يسارَهُ.

أختارُ $x = -1$

الاقترانُ المُعطى $f(x) = -3x^2 + 6x + 5$

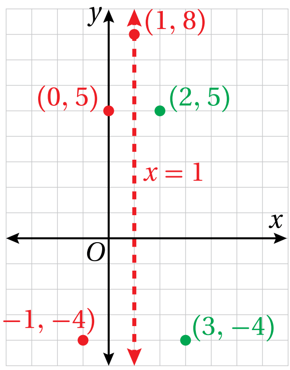
بتعويضِ $x = -1$ $f(-1) = -3(-1)^2 + 6(-1) + 5$

بالتبسيطِ $= -4$

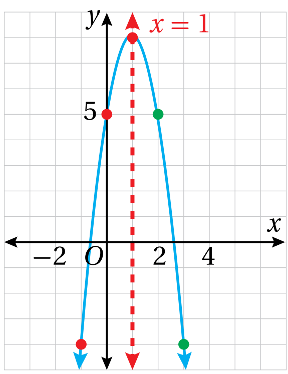
إذنْ، النقطةُ الأُخرى هِيَ $(-1, -4)$.

الخطوةُ 4: أمثّلُ النقاطَ في المُستوى الإحداثيِّ.

أمثّـلُ رأسَ القطـعِ والنقطتَيْـنِ اللتَيْـنِ أوجدتُهما مِنَ الخُطوتَيْـنِ 2 وَ 3، وَهُمـا $(0, 5)$ وَ $(-1, -4)$، ثـمَّ أستعملُ التَّماثُلَ لأعكِسَ النقطتَيْنِ $(0, 5)$ وَ $(-1, -4)$ حولَ محورِ التَّماثُلِ؛ لإيجادِ نقطتَيْنِ أُخرَيَيْنِ عَلى التمثيلِ البيانيِّ.



الخطوةُ 5: أَصِلُ بينَ النقاطِ بِمُنحنًى أملَسَ.



أتحقَّقُ مِنْ فهمي

أمثّلُ الاقترانَ: $f(x) = x^2 - 4x - 5$

أتعلَّمُ

بمـا أنَّ محـورَ التَّماثُلِ يقسِـمُ القطـعَ المُكافِئَ جُزأيْـنِ متطابقَيْـنِ، فإنَّ لكلِّ نقطةٍ على يسارِ هذا المحـورِ نقطـةً تناظرُها على يمينِـهِ وتَبعُـدُ عنهُ المسافةَ نفسَـها، ويكونُ للنقطتَيْـنِ الإحداثِـيُّ y نفسُهُ.

إرشادٌ

أسـتعملُ أوراقَ الرسـمِ البيانـيِّ الموجـودةَ في نهايةِ كتابِ التمارينِ.

أتدرَّبُ وأحُلُّ المسائلَ

أَجِدُ إحداثيّي الرأسِ ومعادلةَ محورِ التماثلِ، والقيمةَ العُظمى أوِ الصُّغرى ومجالَ كلٍّ مِنَ الاقتراناتِ التربيعيَّةِ الآتيةِ ومَداها:

1) $f(x) = 3x^2$

2) $f(x) = \frac{1}{2}x^2$

3) $f(x) = -x^2 + 5$

4) $f(x) = x^2 + 3$

5) $f(x) = 3x^2 + 6x - 2$

6) $f(x) = -8x + 2x^2$

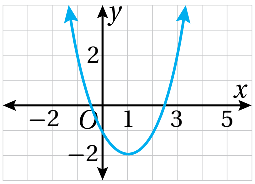
7) $f(x) = -2x^2 - 6x + 4$

8) $f(x) = 5 + 16x - 2x^2$

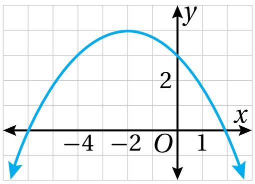
9) $f(x) = -2(x-4)^2 - 3$

أَجِدُ إحداثيّي الرأسِ ومعادلةَ محورِ التماثلِ، والقيمةَ العُظمى أوِ الصُّغرى ومجالَ كلٍّ مِنَ القطوعِ المُكافِئةِ الآتيةِ ومَداها:

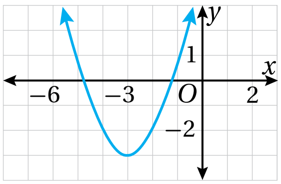
10)



11)



12)



أمثّلُ كُلًّا مِنَ الاقتراناتِ الآتيةِ بيانيًّا: إرشادٌ: أستعملُ أوراقَ الرسمِ البيانيِّ الموجودةَ في نهايةِ كتابِ التمارينِ.

13 $f(x) = x^2 + 6x - 2$

14 $f(x) = 2x^2 - 10x + 1$

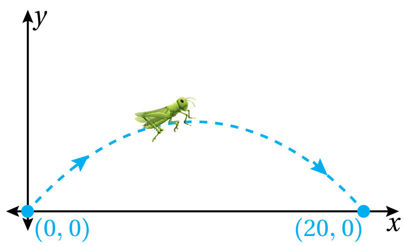
15 $f(x) = -3x^2 + 18x + 6$

16 $f(x) = -4x^2 - 8x + 7$

17 $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 4x - 6$

18 $f(x) = 5x^2 - 20$

19 **حشراتٌ:** يمثّلُ الاقترانُ $f(x) = -\frac{1}{20}x^2 + x$ ارتفاعَ جُندُبٍ بالسنتيمترِ فوقَ سطحِ الأرضِ عندَ قفزِهِ؛ حيثُ x المسافةُ الأفقيَّةُ مِنْ نقطةِ القفزِ. أَجِدُ أَقصى ارتفاعٍ يمكنُ أنْ يَصِلَ إليهِ الجُندُبُ.



رياضةٌ: يمثّلُ الاقترانُ $h(t) = -4.9t^2 + 3.8t + 0.5$ ارتفاعَ كرةٍ مضربٍ بالأمتارِ فوقَ سطحِ الأرضِ، بعدَ t ثانيةً مِنْ ضربِ سميرٍ لها.

20 أَجِدُ ارتفاعَ الكرةِ لحظةَ ضربِ سميرٍ لها.

21 أَجِدُ أقصَى ارتفاعٍ يمكنُ أنْ تَصِلَ إليهِ الكرةُ.

مهاراتُ التفكيرِ العُليا

22 **مسألةٌ مفتوحةٌ:** أكتبُ قاعدةَ اقترانٍ تربيعيٍّ مُعادلةُ محورِ تماثُلِهِ $x = -2$.

23 **أكتشفُ الخطأَ:** حاولَ هشامٌ ومَلَكُ إيجادَ مُعادلةِ محورِ التَّماثُلِ للقطعِ المُكافِئِ $f(x) = -2x^2 - 16x + 7$، فكانَتْ إجابَتاهُما كالآتي. أيُّهُما إجابتُهُ صحيحةٌ؟ أبرّرُ إجابتي.

هشامٌ

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{16}{2(-2)}$$

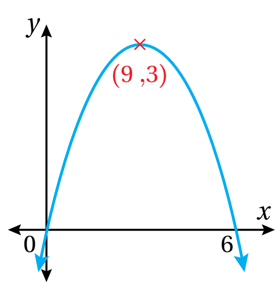
$$x = 4$$

مَلَكُ

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{(-16)}{2(-2)}$$

$$x = -4$$

24 **تَحَدٍّ:** أَجِدُ قاعدةَ الاقترانِ المُمَثَّلِ بيانيًّا في الشكلِ المُجاورِ.



معمل برمجيَّة جيوجبرا

استكشافُ التحويلاتِ الهندسيَّةِ للاقترانِ التربيعيِّ

Exploring Transformations of Quadratic Function

يمكنُني استعمالُ برمجيَّةِ جيوجيبرا؛ لاستكشافِ أثرِ التحويلاتِ الهندسيَّةِ في مُنحنى الاقترانِ الرئيسِ $f(x) = x^2$.

نشاطٌ

الخطوةُ 1: أكتبُ قاعدةَ الاقترانِ $f(x) = x^2$ في شريطِ الإدخالِ، ثمَّ أضغطُ ↵، ليظهَرَ التمثيلُ البيانيُّ للاقترانِ.

الخطوةُ 2: أنقرُ على أيقونةِ Slider $a=2$ مِنْ شريطِ الأدواتِ، ثمَّ أنقرُ على الموقعِ الذي أريدُهُ في الشاشةِ، ليظهَرَ مربَّعُ حوارٍ أحدّدُ فيهِ أعلى قيمةٍ وأقلَّ قيمةٍ لـِ a (مثلًا، أقلُّ قيمةٍ -10 وأعلى قيمةٍ 10)، وأضبطُ الأيقونةَ على العددِ 1

الخطوةُ 3: أكرّرُ الخُطوةَ السابقةَ لإدراجِ مؤشِّرَيْنِ للتحكُّمِ، وَأُسَمّي أحدَهُما h، والآخَرَ k، وأضبطُ المؤشِّرَيْنِ على العددِ 0

الخطوةُ 4: أكتبُ القاعدةَ $g(x) = a\,(x-h)^2 + k$ في شريطِ الإدخالِ، ثمَّ أضغطُ ↵، ليظهَرَ التمثيلُ البيانيُّ للاقترانِ.

الخطوةُ 5: أحرّكُ المؤشِّرَ a لتصبحَ قيمتُهُ مَرَّةً أكبرَ مِنْ 1، وَمَرَّةً بينَ 0 وَ 1، وَمَرَّةً أقلَّ مِنْ 1، ثمَّ أُجيبُ عَنِ الأسئلةِ الآتيةِ:

- ما تأثيرُ تغييرِ قيمةِ a عندما تكونُ أكبرَ مِنْ 1 في مُنحنى الاقترانِ g بالمقارنةِ معَ مُنحنى الاقترانِ f؟
- ما تأثيرُ تغييرِ قيمةِ a عندما تكونُ بينَ 0 وَ 1 في مُنحنى الاقترانِ g بالمقارنةِ معَ مُنحنى الاقترانِ f؟
- ما تأثيرُ تغييرِ قيمةِ a عندما تكونُ أصغرَ مِنْ 0 في مُنحنى الاقترانِ g بالمقارنةِ معَ مُنحنى الاقترانِ f؟

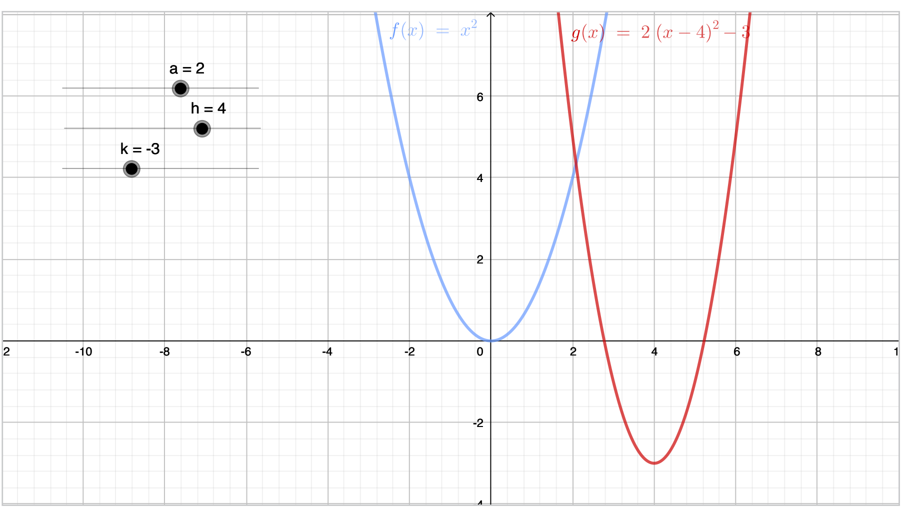
أتعلَّمُ

يُمكِنُني تغييرُ مواقعِ المؤشراتِ في الشاشةِ وترتيبُها فوقَ بعضِها باستعمالِ خاصيَّةِ النَّقرِ والسَّحبِ.

الخطوةُ 6: أُحرّكُ المؤشِّــرَ h بحيثُ تصبحُ قيمتُهُ مَرَّةً أكبرَ مِنْ 0، وَمَرَّةً أقلَّ مِنْ 0، ثمَّ أُجيبُ عَنِ الأسئلةِ الآتيةِ:

- في أيِّ الاتجاهاتِ يتحرَّكُ الاقترانُ g عندَ تحريكِ المؤشِّرِ h؟
- ما تأثيــرُ تغييرِ قيمةِ h عندما تكونُ أكبرَ مِنْ 0 في مُنحنــى الاقترانِ g بالمقارنةِ معَ مُنحنى الاقترانِ f؟
- ما تأثيرُ تغييرِ قيمةِ h عندما تكــونُ أصغرَ مِنْ 0 في مُنحنى الاقترانِ g بالمقارنةِ معَ مُنحنى الاقترانِ f؟

الخطوةُ 7: أحرّكُ المؤشِّــرَ k بحيث تصبحُ قيمتُهُ مَرَّةً أكبرَ مِــنْ 0، وَمَرَّةً أقلَّ مِنْ 0، ثمَّ أُجيبُ عنِ الأسئلةِ الآتيةِ:



- في أيِّ الاتجاهاتِ يتحرَّكُ الاقترانُ g عندَ تحريكِ المؤشِّرِ k؟
- ما تأثيرُ تغييــرِ قيمةِ k عندما تكونُ أكبرَ مِنْ 0 في مُنحنى الاقتــرانِ g بالمقارنةِ معَ مُنحنى الاقترانِ f؟
- ما تأثيرُ تغييرِ قيمةِ k عندما تكــونُ أصغرَ مِنْ 0 في مُنحنى الاقترانِ g بالمقارنةِ معَ مُنحنى الاقترانِ f؟

الخطوةُ 8: أَضْبطُ المؤشِّراتِ الثلاثةَ على أعدادٍ أختارُها، ثمَّ أصفُ علاقةَ مُنحنى الاقترانِ g بِمُنحنى الاقترانِ الرئيسِ f.

أتعلَّمُ

يمكنُنــي تغييــرُ لــونِ الاقتــرانِ، بالنَّقــرِ علــى مُنحنــاهُ واختيارِ (settings) ثمَّ (color) مــنَ القائمةِ الّتــي تظهرُ يميــنَ الشاشــةِ، ومنهــا أختارُ لونًا.

الدرس

4

التحويلاتُ الهندسيَّةُ للاقترانِ التربيعيِّ

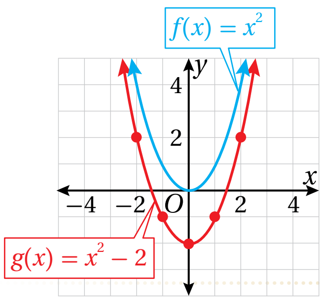
Transformations of Quadratic Function

فكرةُ الدرسِ تمثيلُ مُنحنياتِ الاقتراناتِ التربيعيَّةِ الناتجةِ عنْ تطبيقِ تحويلٍ هندسيٍّ أوْ أكثرَ على مُنحنى الاقترانِ الرئيسِ.

المصطلحاتُ التحويلُ الهندسيُّ، الانسحابُ، الانسحابُ الرأسيُّ، الانسحابُ الأفقيُّ، التمدُّدُ، الانعكاسُ، صيغةُ الرأسِ.

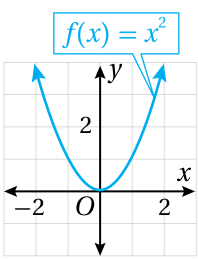
مسألةُ اليومِ يبيِّنُ الشكلُ المُجاورُ التمثيلَ البيانيَّ لِمُنْحنيَي الاقترانَيْنِ $f(x) = x^2$ و $g(x) = x^2 - 2$.

ما العلاقةُ بينَ مُنحنَيَي الاقترانَيْنِ f وَ g؟



الانسحابُ

تعلَّمتُ سابقًا أنَّ الاقترانَ الرئيسَ لعائلةِ الاقتراناتِ التربيعيَّةِ هُوَ $f(x) = x^2$، الذي يأخذُ مُنحناهُ شكلَ القطعِ المُكافِئِ، كما في الشكلِ المُجاورِ.



أمّا مُنحنياتُ الاقتراناتِ التربيعيَّةِ الأُخرى فَهيَ ناتجةٌ مِنْ تطبيقِ **تحويلٍ هندسيٍّ** (transformation) أوْ أكثرَ على مُنحنى الاقترانِ الرئيسِ، بحيثُ تغيِّرُ هذهِ التحويلاتُ الهندسيَّةُ موقعَ الاقترانِ الرئيسِ أوْ شكلَهُ.

يُعَدُّ **الانسحابُ** (translation) أحدَ التحويلاتِ الهندسيَّةِ التي تؤثِّرُ في موقعِ الاقترانِ الرئيسِ وتنقُلُهُ إمّا إلى الأعلى أوْ إلى الأسفلِ أوْ إلى اليمينِ أوْ إلى اليسارِ دونَ تغييرٍ في أبعادِهِ.

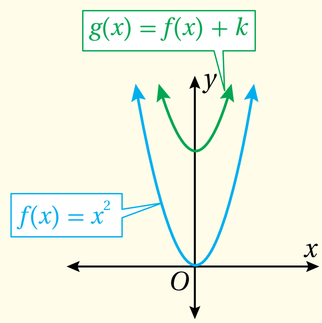
عندَ إضافةِ الثابتِ الموجبِ k إلى قاعدةِ الاقترانِ الرئيسِ $f(x)$ أوْ طرحِهِ منها، فإنَّ مُنحنى الاقترانِ $f(x) \pm k$ هُوَ مُنحنى الاقترانِ الرئيسِ مُزاحًا إلى الأعلى أوْ إلى الأسفلِ بمقدارِ k وحدةً، وَيُسَمّى هذا التحويلُ **الانسحابَ الرأسيَّ** (vertical translation).

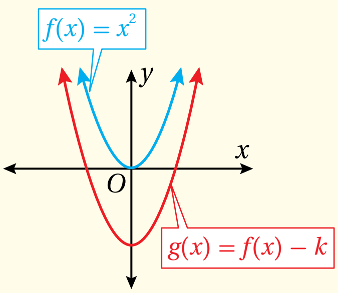
مفهومٌ أساسيٌّ

الانسحابُ الرأسيُّ للاقترانِ التربيعيِّ

إذا كانَ $f(x) = x^2$ وكانَ k عددًا حقيقيًّا موجبًا، فإنَّ:

- مُنحنى $g(x) = x^2 + k$، هُوَ مُنحنى $f(x)$ مُزاحًا إلى الأعلى k وَحدةً.
- مُنحنى $g(x) = x^2 - k$، هُوَ مُنحنى $f(x)$ مُزاحًا إلى الأسفلِ k وحدةً.





مثال 1

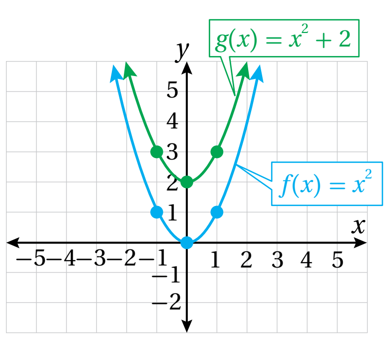
أَصِفُ كيفَ يرتبطُ مُنحنى كلِّ اقترانٍ ممّا يأتي بِمُنحنى الاقترانِ الرئيسِ $f(x) = x^2$، ثمَّ أمثّلُهُ بيانيًّا:

1 $g(x) = x^2 + 2$

مُنحنى $g(x)$ هُوَ مُنحنى $f(x) = x^2$ مُزاحًا وَحدتَينِ إلى الأعلى.

لتمثيلِ مُنحنى $g(x)$ بيانيًّا أتَّبعُ الإجراءاتِ الآتيَةَ:

- أختارُ مجموعةً مِنَ النقاطِ التي تقعُ على مُنحنى $f(x) = x^2$.
- أُضيفُ 2 للإحداثيِّ y للنقاطِ التي اخترتُها.
- أمثّلُ النقاطَ الجديدةَ في المُستوى الإحداثيِّ، ثمَّ أصلُ بينها بِمُنحنًى أملَسَ، كما يظهَرُ في الشكلِ المُجاورِ.



أتعلَّمُ

عندَ اختيارِ مجموعةٍ مِنَ النقاطِ على مُنحنى الاقترانِ الرئيسِ يُفَضَّلُ أنْ تتوسّطَ نقطةُ الرأسِ هذهِ النقاطَ. فمثلًا، يمكنُ اختيارُ النقاطِ الآتيةِ:

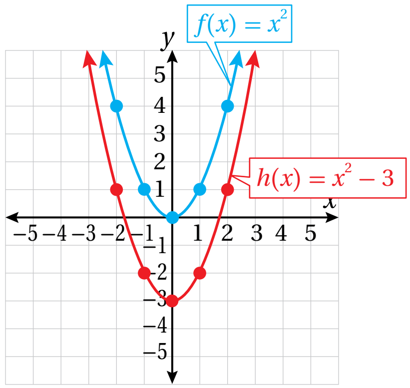
$(-2, 4), (-1, 1), (0, 0), (1, 1), (2, 4)$

2 $h(x) = x^2 - 3$

مُنحنى $h(x)$ هُوَ مُنحنى $f(x) = x^2$ مُزاحًا 3 وَحداتٍ إلى الأسفلِ.

لتمثيلِ مُنحنى $h(x)$ بيانيًّا أتّبعُ الإجراءاتِ الآتيةَ:

- أختارُ مجموعةً مِنَ النقاطِ التي تقعُ على مُنحنى $f(x) = x^2$.
- أطرحُ 3 مِنَ الإحداثيِّ y للنقاطِ التي اخترتُها.
- أمثِّلُ النقاطَ الجديدةَ في المُستوى الإحداثيِّ، ثمَّ أصِلُ بينها بمُنحنًى أملَسَ، كما يظهَرُ في الشكلِ المُجاورِ.



أتحقَّقُ مِنْ فهمي

أصِفُ كيفَ يرتبطُ مُنحنى كلِّ اقترانٍ ممّا يأتي بِمُنحنى الاقترانِ الرئيسِ $f(x) = x^2$، ثمَّ أمثّلُهُ بيانيًّا:

a) $p(x) = x^2 + 3$

b) $t(x) = x^2 - 4$

إرشادٌ

أستعملُ أوراقَ الرسمِ البيانيِّ الموجودةَ في نهايةِ كتابِ التمارينِ.

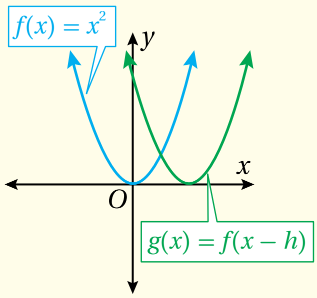
عندَ إضافةِ الثابتِ الموجبِ h إلى قِيَمِ x جميعِها في مجالِ الاقترانِ $f(x)$ أوْ طرحِهِ منها، فإنَّ مُنحنى الاقترانِ $f(x \pm h)$ هُوَ مُنحنى الاقترانِ الرئيسِ مُزاحًا إلى اليمينِ أوْ إلى اليسارِ بِمقدارِ h وحدةً، وَيُسمّى هذا التحويلُ **الانسحابَ الأفقيَّ** (horizontal translation).

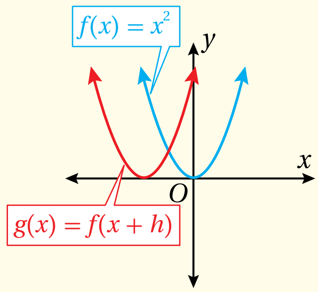
مفهومٌ أساسيٌّ

الانسحابُ الأفقيُّ للاقترانِ التربيعيِّ

إذا كانَ $f(x) = x^2$ وكانَ h عددًا حقيقيًّا موجبًا، فإنَّ:

- مُنحنى $g(x) = (x - h)^2$، هُوَ مُنحنى $f(x)$ مُزاحًا إلى اليمينِ h وَحدةً.
- مُنحنى $g(x) = (x + h)^2$، هُوَ مُنحنى $f(x)$ مُزاحًا إلى اليسارِ h وحدةً.





أفكِّرُ

لماذا يُعبَّرُ عنِ الإزاحةِ إلى اليمينِ بالطَّرحِ $(x - h)$، وإلى اليسارِ بالجمعِ $(x + h)$؟

مثال 2

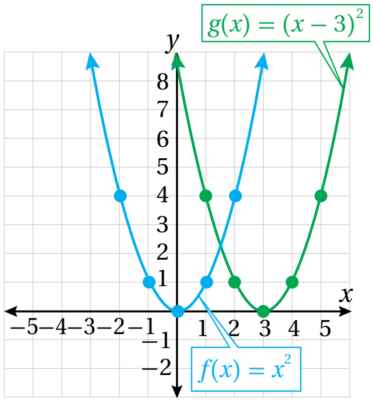
أصفُ كيفَ يرتبطُ مُنحنى كلِّ اقترانٍ ممّا يأتي بِمُنحنى الاقترانِ الرئيسِ $f(x) = x^2$، ثمَّ أمثِّلُهُ بيانيًّا:

1 $g(x) = (x - 3)^2$

مُنحنى $g(x)$ هُوَ مُنحنى $f(x) = x^2$ مُزاحًا 3 وَحداتٍ إلى اليمينِ.

لتمثيلِ مُنحنى $g(x)$ بيانيًّا أتَّبِعُ الإجراءاتِ الآتيةَ:

- أختارُ مجموعةً مِنَ النقاطِ تقعُ على مُنحنى $f(x) = x^2$.
- أُضيفُ 3 إلى الإحداثيِّ x للنقاطِ التي اخترتُها.
- أمثِّلُ النقاطَ الجديدةَ في المُستوى الإحداثيِّ، ثمَّ أصلُ بينها بمُنحنًى أملَسَ، كما يظهَرُ في الشكلِ المُجاورِ.

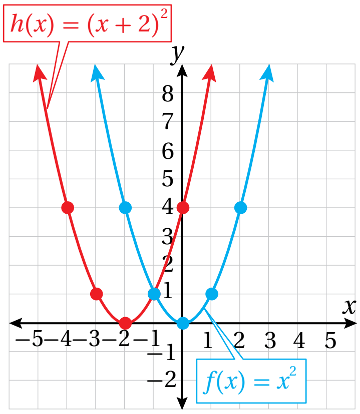


2 $h(x) = (x + 2)^2$

مُنحنى $h(x)$ هُوَ مُنحنى $f(x) = x^2$ مُزاحًا وَحدتَينِ إلى اليسارِ.

لتمثيلِ مُنحنى $h(x)$ بيانيًّا أتَّبِعُ الإجراءاتِ الآتيةَ:

- أختارُ مجموعةً مِنَ النقاطِ التي تقعُ على مُنحنى $f(x) = x^2$.
- أطرحُ 2 مِنَ الإحداثيِّ x للنقاطِ التي اخترتُها.
- أمثِّلُ النقاطَ الجديدةَ في المُستوى الإحداثيِّ، ثمَّ أصِلُ بينها بمُنحنًى أملَسَ، كما يظهَرُ في الشكلِ المُجاورِ.



أتحقَّقُ مِنْ فهمي

أصفُ كيفَ يرتبطُ مُنحنى كلِّ اقترانٍ ممّا يأتي بِمُنحنى الاقترانِ الرئيسِ $f(x) = x^2$، ثمَّ أمثِّلُهُ بيانيًّا:

a) $p(x) = (x - 4)^2$

b) $t(x) = (x + 3)^2$

إرشادٌ

أستعملُ أوراقَ الرسمِ البيانيِّ الموجودةَ في نهايةِ كتابِ التمارينِ.

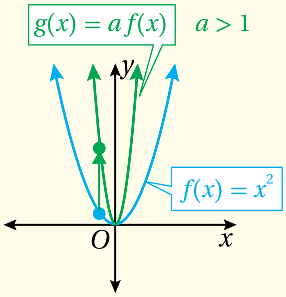
التمدُّدُ

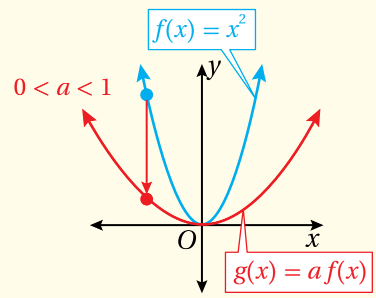
التمدُّدُ (dilation) هُوَ تحويلٌ هندسيٌّ يؤدّي إلى توسيعِ مُنحنى الاقترانِ أوْ تضييقِهِ، فعندَ ضربِ الاقترانِ الرئيسِ $f(x)$ بالثابتِ a؛ حيثُ a عددٌ حقيقيٌّ موجبٌ، فإنَّ مُنحنى الاقترانِ $a\,f(x)$ هُوَ توسيعٌ أوْ تضييقٌ رأسيٌّ لِمُنحنى الاقترانِ $f(x)$.

مفهومٌ أساسيٌّ — تمددُ الاقترانِ التربيعيِّ

إذا كانَ $f(x) = x^2$ وكانَ a عددًا حقيقيًّا موجبًا، فإنَّ مُنحنى $g(x) = ax^2$ هُوَ:

- توسيعٌ رأسيٌّ بمعاملٍ مقدارُهُ a لِمُنحنى $f(x)$، إذا كانتْ $a > 1$.
- تضييقٌ رأسيٌّ بمعاملٍ مقدارُهُ a لِمُنحنى $f(x)$، إذا كانتْ $0 < a < 1$





مثال 3

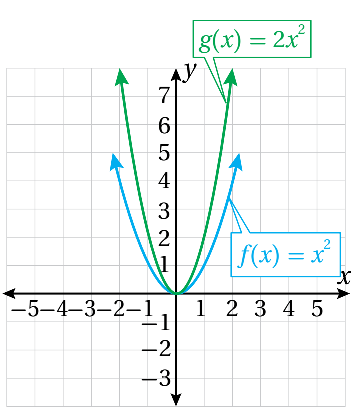
أَصِفُ كيفَ يرتبطُ مُنحنى كلِّ اقترانٍ ممّا يأتي بِمُنحنى الاقترانِ الرئيسِ $f(x) = x^2$، ثمَّ أمثّلُهُ بيانيًّا:

1 $g(x) = 2x^2$

مُنحنى $g(x)$ هُوَ توسيعٌ رأسيٌّ لِمُنحنى $f(x) = x^2$ بمعاملٍ مقدارُهُ 2

لتمثيلِ مُنحنى $g(x)$ بيانيًّا أتَّبعُ الإجراءاتِ الآتيةَ:

- أختارُ مجموعةً مِنَ النقاطِ تقعُ على مُنحنى $f(x) = x^2$.
- أضربُ الإحداثيَّ y للنقاطِ التي اخترتُها في 2
- أمثّلُ النقاطَ الجديدةَ في المُستوى الإحداثيِّ، ثمَّ أصِلُ بينها بِمُنحنًى أملَسَ، كما يظهَرُ في الشكلِ المُجاورِ.



أتعلَّمُ

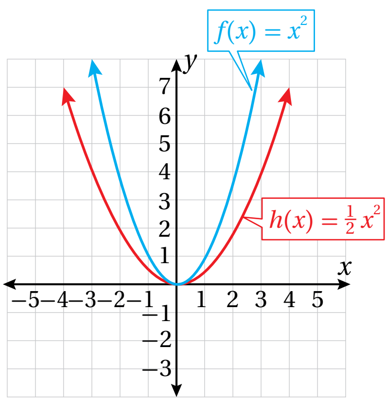
ألاحظُ أنَّ مُنحنى الاقترانِ التربيعيِّ عندَما يتوسَّعُ رأسيًّا، فإنَّهُ يبدو أضيقَ أفقيًّا منَ الاقترانِ الرئيسِ.

2 $h(x) = \frac{1}{2}x^2$

مُنحنى $h(x)$ هُوَ تضييقٌ رأسيٌّ لِمُنحنى $f(x) = x^2$ بمعاملٍ مقدارُهُ $\frac{1}{2}$

لتمثيلِ مُنحنى $h(x)$ بيانيًّا أتَّبِعُ الإجراءاتِ الآتيةَ:

- أختارُ مجموعةً مِنَ النقاطِ التي تقعُ على مُنحنى $f(x) = x^2$.
- أضربُ الإحداثيَّ y للنقاطِ التي اخترتُها في $\frac{1}{2}$
- أمثِّلُ النقاطَ الجديدةَ في المُستوى الإحداثيِّ، ثمَّ أصِلُ بينها بمُنحنًى أملَسَ، كما يظهَرُ في الشكلِ المُجاورِ.



أتعلَّمُ

ألاحظُ أنَّ مُنحنى الاقترانِ التربيعيِّ عندَما يضيقُ رأسيًّا، فإنّهُ يبدو أوسعَ أفقيًّا مِنَ الاقترانِ الرئيسِ.

أتحقَّقُ مِنْ فهمي

أصفُ كيفَ يرتبطُ مُنحنى كلِّ اقترانٍ ممّا يأتي بِمُنحنى الاقترانِ الرئيسِ $f(x) = x^2$، ثمَّ أمثِّلُهُ بيانيًّا:

a) $g(x) = 3x^2$

b) $g(x) = \frac{1}{3}x^2$

إرشادٌ

أستعملُ أوراقَ الرسمِ البيانيِّ الموجودةَ في نهايةِ كتابِ التمارينِ.

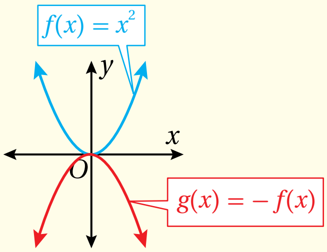
الانعكاسُ

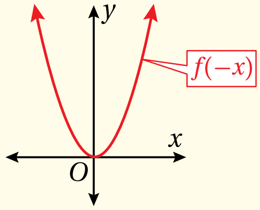
الانعكاسُ (reflection) هُوَ تحويلٌ هندسيٌّ يعكِسُ مُنحنى الاقترانِ حولَ مُستقيمٍ مُحَدَّدٍ.

مفهومٌ أساسيٌّ — الانعكاسُ

إذا كانَ $f(x) = x^2$ فإنَّ:

- مُنحنى $g(x) = -f(x)$، هُوَ انعكاسٌ لِمُنحنى $f(x)$ حولَ المحورِ x.
- مُنحنى $g(x) = f(-x)$، هُوَ انعكاسٌ لِمُنحنى $f(x)$ حولَ المحورِ y.





أتعلَّمُ

انعكاسُ الاقترانِ $f(x) = x^2$ حولَ المحورِ y يُعطي الاقترانَ نفسَهُ؛ لأنَّ:

$f(-x) = (-x)^2 = x^2$

مثال 4

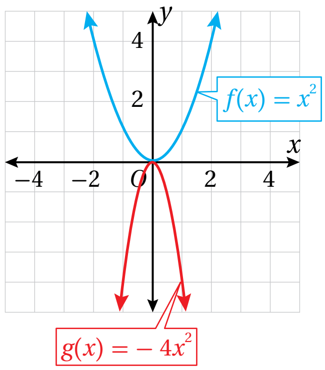
أَصِفُ كيفَ يرتبطُ مُنحنى كلِّ اقترانٍ ممّا يأتي بِمُنحنى الاقترانِ الرئيسِ $f(x) = x^2$، ثمَّ أمثّلُهُ بيانيًّا:

1 $g(x) = -4x^2$

مُنحنى $g(x)$ هُوَ انعكاسٌ لِمُنحنى $f(x) = x^2$ حولَ المحورِ x، ثمَّ توسيعٌ رأسيٌّ بِمعاملٍ مقدارُهُ 4

لتمثيلِ مُنحنى $g(x)$ بيانيًّا أتّبعُ الإجراءاتِ الآتيةَ:

- أختارُ مجموعةً مِنَ النقاطِ تقعُ على مُنحنى $f(x) = x^2$.
- أضربُ الإحداثيَّ y للنقاطِ التي اخترتُها في -4
- أمثّلُ النقاطَ الجديدةَ في المُستوى الإحداثيِّ، ثمَّ أصلُ بينها بمُنحنًى أملَسَ، كما يظهرُ في الشكلِ المُجاورِ.

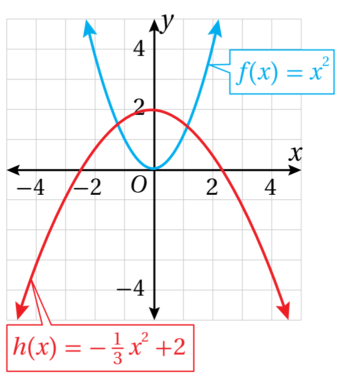


2 $h(x) = -\frac{1}{3}x^2 + 2$

مُنحنى $h(x)$ هُوَ انعكاسٌ لمُنحنى $f(x) = x^2$ حولَ المحورِ x، ثمَّ تضييقٌ رأسيٌّ بمعاملٍ مقدارُهُ $\frac{1}{3}$، ثمَّ انسحابُ وَحدتَينِ إلى الأعلى.

لتمثيلِ مُنحنى $h(x)$ بيانيًّا أتّبعُ الإجراءاتِ الآتيةَ:

- أختارُ مجموعةً مِنَ النقاطِ التي تقعُ على مُنحنى $f(x) = x^2$.
- أضربُ الإحداثيَّ y للنقاطِ التي اخترتُها في $-\frac{1}{3}$
- أُضيفُ 2 إلى الإحداثيِّ y للنقاطِ الناتجةِ مِنَ الخُطوةِ السابقةِ.
- أمثّلُ النقاطَ مِنَ الخُطوةِ السابقةِ في المُستوى الإحداثيِّ، ثمَّ أصلُ بينها بِمُنحنًى أملَسَ، كما يظهَرُ في الشكلِ المُجاورِ.



أتحقَّقُ مِنْ فهمي

أصفُ كيفَ يرتبطُ مُنحنى كلِّ اقترانٍ ممّا يأتي بِمُنحنى الاقترانِ الرئيسِ $f(x) = x^2$، ثمّ أمثّلُهُ بيانيًّا:

a) $g(x) = -\frac{1}{2}x^2$ **b)** $g(x) = -x^2 - 4$

كتابةُ التحويلِ الهندسيِّ للاقترانِ التربيعيِّ

تُسمّى الصيغةُ $f(x) = a(x-h)^2 + k$ **صيغةَ الرأسِ** (vertex form) للاقترانِ التربيعيِّ؛ حيثُ $a \neq 0$ وَ (h, k) هوَ رأسُ القطعِ المُكافِئِ، ويمكنُ استعمالُها لكتابةِ قاعدةِ الاقترانِ التربيعيِّ الناتجِ مِنْ تطبيقِ تحويلٍ هندسيٍّ أوْ أكثرَ على الاقترانِ التربيعيِّ الرئيسِ، بحيثُ يمثّلُ h الانسحابَ الأفقيَّ، ويمثّلُ k الانسحابَ الرأسيَّ، أمّا قيمةُ a فتمثّلُ التمدّدَ الرأسيَّ، وتمثّلُ إشارةُ a الانعكاسَ.

$$f(x) = a(x-h)^2 + k$$

الانسحابُ الرأسيُّ

الانعكاسُ والتمدُّدُ الرأسيُّ

الانسحابُ الأفقيُّ

> **أتعلَّمُ**
> سُمِّيَت الصيغةُ $f(x) = a(x-h)^2 + k$ بصيغةِ الرأسِ للاقترانِ التربيعيِّ؛ لأنَّهُ يمكنُ بها تحديدُ الرأسِ بسهولةٍ.

مثال 5

إذا كانَ مُنحنى الاقترانِ $g(x)$ ناتجًا مِنِ انعكاسِ مُنحنى الاقترانِ الرئيسِ $f(x) = x^2$ حولَ المحورِ x، ثمَّ توسيعٍ رأسيٍّ بِمعاملٍ مقدارُهُ 2، ثمَّ انسحابٍ إلى اليسارِ بِمقدارِ وَحدتَينِ، ثمَّ انسحابٍ إلى الأعلى بِمقدارِ 3 وَحداتٍ، فَأُجيبُ عَنِ الأسئلةِ الآتيةِ:

1 **أكتبُ قاعدةَ الاقترانِ $g(x)$ باستعمالِ صيغةِ الرأسِ.**

- بما أنَّ الانعكاسَ حولَ المحورِ x، ومعاملَ التوسيعِ الرأسيِّ 2، فإنَّ: $a = -2$
- بما أنَّ الانسحابَ الأفقيَّ إلى اليسارِ بِمقدارِ 2، فإنَّ: $h = -2$
- بما أنَّ الانسحابَ الرأسيَّ إلى الأعلى بِمقدارِ 3، فإنَّ: $k = 3$

> **أتعلَّمُ**
> أستعملُ الإشارةَ السالبةَ للدَّلالةِ على الانعكاسِ حولَ المحورِ x، والانسحابِ إلى اليسارِ وإلى الأسفلِ.

صيغةُ الرأسِ للاقترانِ التربيعيِّ	$g(x) = a(x-h)^2 + k$
بتعويضِ $a=-2, h=-2, k=3$	$= -2(x-(-2))^2 + 3$
بالتبسيطِ	$= -2(x+2)^2 + 3$

2 **أَجِدُ إحداثيَّي رأسِ القطعِ، ومُعادلةَ محورِ التَّماثُلِ، والقيمةَ العُظمى أوِ الصُّغرى للاقترانِ $g(x)$.**

بما أنَّ $g(x) = -2(x+2)^2 + 3$، فإنَّ:

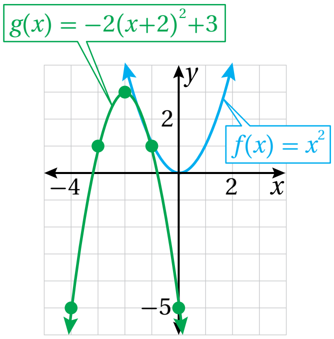
- رأسُ القطعِ $(-2, 3)$
- مُعادلةُ محورِ التماثُلِ $x = -2$
- القيمةُ العُظمى 3

أتذكَّرُ

بما أنَّ $a < 0$، فإنَّ رأسَ القطعِ المُكافِئِ يمثّلُ نقطةَ القيمةِ العُظمى.

3 **أُمثِّلُ الاقترانَ $g(x)$ بيانيًّا.**

يُمكِنُني استعمالُ التحويلاتِ الهندسيَّةِ لتمثيلِ مُنحنى الاقترانِ، كما في الشكلِ المُجاورِ.



أتحقَّقُ مِنْ فهمي

إذا كانَ مُنحنى الاقترانِ $g(x)$ ناتجًا مِنَ انعكاسِ مُنحنى الاقترانِ الرئيسِ $f(x) = x^2$ حولَ المحورِ x، ثمَّ تضييقٍ رأسيٍّ بِمُعاملٍ مقدارُهُ $\frac{1}{2}$، ثمَّ انسحابٍ إلى اليمينِ بِمقدارِ 3 وَحداتٍ، ثمَّ انسحابٍ إلى الأسفلِ بِمقدارِ 5 وَحداتٍ، فَأُجيبُ عَنِ الأسئلةِ الآتيةِ:

a) أكتبُ قاعدةَ الاقترانِ $g(x)$ باستعمالِ صيغةِ الرأسِ.

b) أَجِدُ إحداثيَّيْ رأسِ القطعِ، ومُعادلةَ محورِ التَّماثُلِ، والقيمةَ العُظمى أوِ الصُّغرى للاقترانِ $g(x)$.

c) أمثِّلُ الاقترانَ $g(x)$ بيانيًّا.

إرشادٌ

أستعملُ أوراقَ الرسمِ البيانيِّ الموجودةَ في نهايةِ كتابِ التمارينِ.

أتدرَّبُ وأحُلُّ المسائلَ

أصفُ كيفَ يرتبطُ مُنحنى كلِّ اقترانٍ ممّا يأتي بمُنحنى الاقترانِ الرئيسِ $f(x) = x^2$، ثمَّ أمثِّلُهُ بيانيًّا:

1) $h(x) = x^2 + 5$

2) $g(x) = x^2 - 6$

3) $h(x) = (x - 2)^2$

4) $g(x) = (x + 1)^2$

5) $v(x) = (x - 1)^2 + 3$

6) $u(x) = (x + 2)^2 - 4$

7) $l(x) = \frac{1}{4}x^2$

8) $m(x) = 2x^2 - 3$

9) $h(x) = -\frac{1}{3}x^2 - 1$

10) $g(x) = -4(x + 2)^2 + 3$

11) $p(x) = (x - 7)^2 + 1$

12) $t(x) = 2(x - 3)^2 - 10$

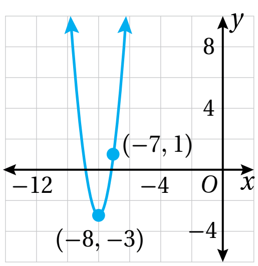
إرشادٌ: أستعملُ أوراقَ الرسمِ البيانيِّ الموجودةَ في نهايةِ كتابِ التمارينِ.

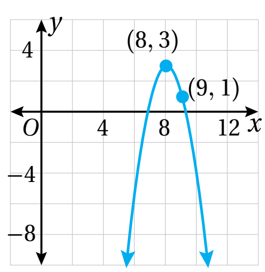
أصلُ الاقترانَ بتمثيلِهِ البيانيِّ في كلٍّ ممّا يأتي:

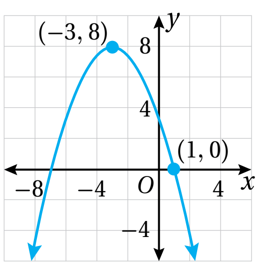
13) $a(x) = 4(x + 8)^2 - 3$

14) $b(x) = -2(x - 8)^2 + 3$

15) $c(x) = -\frac{1}{2}(x+3)^2+8$







إذا كانَ مُنحنى الاقترانِ $g(x)$ ناتجًا مِنِ انعكاسِ مُنحنى الاقترانِ الرئيسِ $f(x) = x^2$ حولَ المحورِ x، ثمَّ توسيعٍ رأسيٍّ بِمعاملٍ مقدارُهُ 4، ثمَّ انسحابٍ إلى الأعلى بِمقدارِ وَحدتَينِ، فَأُجيبُ عنِ الأسئلةِ الآتيةِ:

16) أكتبُ قاعدةَ الاقترانِ $g(x)$ باستعمالِ صيغةِ الرأسِ.

17) أَجِدُ إحداثِيَّيْ رأسِ القطعِ، ومُعادلةَ محورِ التّماثلِ، والقيمةَ العُظمى أوِ الصُّغرى للاقترانِ $g(x)$.

18) أمثّلُ الاقترانَ $g(x)$ بيانيًّا.

آلياتٌ ثقيلةٌ: يمثّلُ الاقترانُ $l(t) = -10t^2 + 200$ العلاقةَ بينَ عددِ لتراتِ الوقودِ $l(t)$ المُتبقيةِ في خزّانِ آليَّةٍ ثقيلةٍ والزمنِ t بالساعاتِ خلالَ مدَّةِ عملِها؛ حيثُ $t \geq 0$.

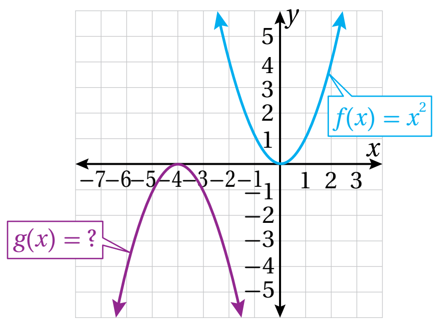
19 ماذا تمثّلُ نقطةُ رأسِ القطعِ المُكافِئِ في سياقِ المسألةِ؟ أبرّرُ إجابتي.

20 هلْ يمكنُ أنْ يكونَ معاملُ t^2 موجبًا في مواقفَ حياتيَّةٍ مشابهةٍ؟ أبرّرُ إجابتي.

21 أصفُ العلاقةَ بينَ مُنحنى الاقترانِ $l(t)$، وَمُنحنى الاقترانِ الأصليِّ $f(t) = t^2$.

مهاراتُ التفكيرِ العُليا

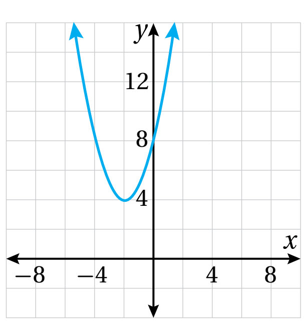
تبريرٌ: في الشكلِ الآتي، إذا كانَ مُنحنى الاقترانِ g ناتجًا مِنْ تحويلٍ هندسيٍّ أوْ أكثرَ لِمُنحنى الاقترانِ f، فَأُجيبُ عَنِ السؤالَيْنِ الآتِيَيْنِ:



22 أصفُ التحويلاتِ الهندسيَّةَ التي مَرَّ بها مُنحنى الاقترانِ f لينتجَ الاقترانُ g، وأبرّرُ إجابتي.

23 أكتبُ قاعدةَ الاقترانِ g بصيغةِ الرأسِ.

24 تَحَدٍّ: أكتبُ بصيغةِ الرأسِ قاعدةَ الاقترانِ المُمَثَّلِ بيانيًّا في الشكلِ الآتي:



أختارُ رمزَ الإجابةِ الصحيحةِ لكلٍّ ممّا يأتي:

1 مجالُ العلاقةِ:

$\{(3, 5), (2, -2), (1, 5), (0, -2), (1, 2)\}$: هُوَ:

a) $\{0, 1, 2, 3\}$ b) $\{-2, 2, 5\}$

c) $\{0, 2, 3\}$ d) $\{-2, 0, 1\}$

2 إذا كانَ $f(x) = x^2 + 2x - 3$، فإنَّ $f(1)$ تُساوي:

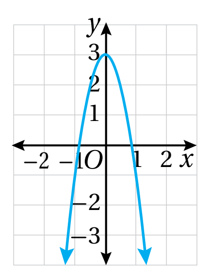
a) -3 b) -1 c) 0 d) 3

3 مُعادلةُ محورِ التَّماثُلِ للاقترانِ $f(x) = x^2 - 10x + 1$:

a) $y = 5$ b) $x = 10$

c) $x = 5$ d) $x = -5$

4 أيُّ الاقتراناتِ الآتيةِ يعبِّرُ عَنِ المُنحنى المُمَثَّلِ بيانيًّا؟



a) $f(x) = -4x^2$ b) $f(x) = -4x^2 + 3$

c) $f(x) = x^2 + 3$ d) $f(x) = 1 - 4x^2$

5 إحداثيّا نقطةِ رأسِ القطعِ المُكافِئِ للاقترانِ التربيعيِّ $y = x^2 + 2x + 3$ هما:

a) $(0, 3)$ b) $(2, 11)$

c) $(1, 6)$ d) $(-1, 2)$

أحدّدُ مجالَ كلِّ علاقةٍ ممّا يأتي وَمَداها، ثمَّ أحدّدُ ما إذا كانتْ تمثّلُ اقترانًا أمْ لا:

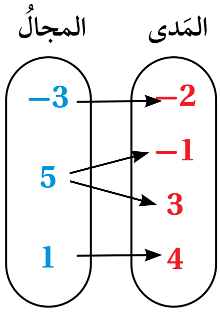
6 $\{(-1, 6), (4, 2), (2, 36), (1, 6)\}$

7 $\{(5, -4), (-2, 3), (5, -1), (2, 3)\}$

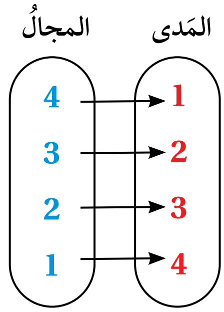
8

x	-4	-2	0	3
y	-2	1	2	1

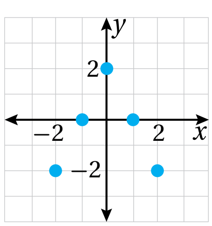
9



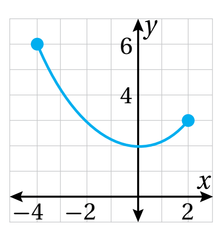
10



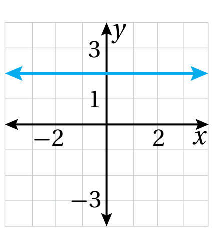
11



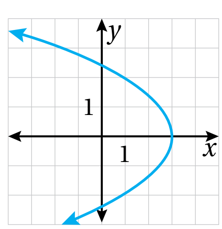
12



13



14



15 كُـرةٌ: رَكَلَ خليلٌ كُـرةً عَنْ سـطحِ الأرضِ. إذا كانَتِ العلاقـةُ بينَ ارتفاعِ الكرةِ عَنْ سـطحِ الأرضِ h بالمترِ والزمنِ t بالثواني مُعطاةً بالاقترانِ $h = -5t^2 + 17t$، فَأَجِدُ أقصى ارتفاعٍ تصلُ إليهِ الكرةُ والزمنَ الذي تحتاجُ إليهِ حتى تَصِلَ إلى أقصى ارتفاعٍ.

أَجِدُ إحداثيّي الرأسِ ومعادلةَ محورِ التماثلِ، والقيمةَ العُظمى أوِ الصُّغرى، ومجالَ كلٍّ مِنَ الاقتراناتِ التربيعيَّةِ الآتيةِ وَمَداها، ثمَّ أمثّلُها بيانيًّا:

16 $f(x) = 2x^2 + 12x + 4$

17 $f(x) = -8x^2 - 16x - 9$

18 $f(x) = 3x^2 - 18x + 15$

19 $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 - 11x + 6$

أصفُ كيفَ يرتبطُ مُنحنى كلِّ اقترانٍ ممّا يأتي بِمُنحنى الاقترانِ الرئيسِ $f(x) = x^2$، ثمَّ أمثّلُها بيانيًّا:

20 $p(x) = 4(x-6)^2 - 9$

21 $p(x) = \frac{1}{2}(x+8)^2$

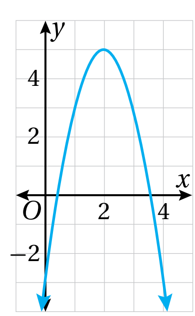
22 $t(x) = -3x^2 + 5$

23 $h(x) = (x+5)^2$

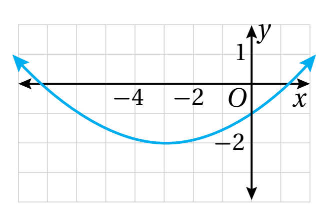
24 $g(x) = -(x+4)^2 - 3$

أَجِدُ إحداثيّي الرأسِ ومعادلةَ محورِ التماثلِ، والقيمةَ العُظمى أوِ الصُّغرى، ومجالَ كلٍّ مِنَ القطوعِ المُكافِئةِ الآتيةِ وَمَداها:

25



26



قذيفةٌ: يمثّلُ الاقترانُ $h(t) = -16(t-6)^2 + 576$ ارتفاعَ قذيفةٍ عَنْ سطحِ الأرضِ بالأمتارِ، بعدَ t ثانيةً مِنْ قذفِها.

27 أَجِدُ ارتفاعَ القذيفةِ بعدَ 4 ثوانٍ مِنْ قذفِها.

28 أَجِدُ أقصى ارتفاعٍ تَصِلُ إليهِ القذيفةُ.

29 أصفُ علاقةَ مُنحنى الاقترانِ $h(t)$ بمُنحنى الاقترانِ $f(t) = t^2$.

تدريبٌ على الاختباراتِ الدَّوليَّةِ

30 التحويلانِ اللذانِ أثَّرا في مُنحنى الاقترانِ $f(x) = x^2$ للحصولِ على مُنحنى الاقترانِ $h(x) = 2(x-3)^2$، هُما:

a) تضييقٌ رأسيٌّ وانسحابُ 3 وَحداتٍ إلى اليمينِ.

b) تضييقٌ رأسيٌّ وانسحابُ 3 وَحداتٍ إلى اليسارِ.

c) توسيعٌ رأسيٌّ وانسحابُ 3 وَحداتٍ إلى اليسارِ.

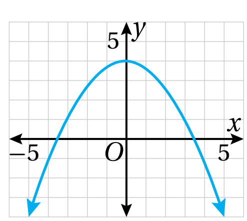
d) توسيعٌ رأسيٌّ وانسحابُ 3 وَحداتٍ إلى اليمينِ.

31 مدى الاقترانِ التربيعيِّ $f(x) = 12x - 3x^2 + 3$

a) $\{y \mid y \leq 15\}$ b) $\{y \mid y \geq 15\}$

c) $\{y \mid y \leq 3\}$ d) $\{y \mid y \geq 3\}$

32 أيُّ الاقتراناتِ الآتيةِ تمثّلُ القطعَ المُكافِئَ في الشكلِ الآتي؟



a) $y = -\frac{1}{3}x^2 - 4$

b) $y = -\frac{1}{3}x^2 + 4$

c) $y = -3x^2 - 4$

d) $y = 3x^2 + 4$

الوحدةُ

3

حلُّ المُعادلاتِ

Solving Equations

ما أهميَّةُ هذهِ الوحدةِ؟

تُستعمَلُ المُعادلاتُ كثيرًا لنمذجةِ حركةِ الأجسامِ في المواقفِ الحياتيَّةِ والعمليَّةِ، ويمكنُ عَنْ طريقِ حلِّ تلكَ المُعادلاتِ تحديدُ قِيَمٍ مهمَّةٍ في هذهِ المواقفِ، مثلِ: تحديدِ زمنِ تحليقِ الجسمِ المقذوفِ قبلَ ارتطامِهِ بالأرضِ، أوِ المسافةِ الأُفقيَّةِ التي تقطعُها الدلافينُ عندَ قفزِها خارجَ الماءِ.

تعلَّمتُ سابقًا:

- ✓ تحليلَ المقاديرِ الجبريَّةِ بإخراجِ العاملِ المُشترَكِ الأكبرِ، وتجميعَ الحدودِ.
- ✓ تحليلَ الفرقِ بينَ مُرَبَّعي حدَّيْنِ، وتحليلَ ثلاثيِّ الحدودِ على الصورةِ $ax^2 + bx + c$
- ✓ التَّمثيلَ البيانيَّ لِمُنحنى الاقترانِ التربيعيِّ.

سأتعلَّمُ في هذهِ الوحدةِ:

- حلَّ المُعادلةِ التربيعيَّةِ بيانيًّا.
- حلَّ المُعادلةِ التربيعيَّةِ بالتحليلِ.
- حلَّ المُعادلةِ التربيعيَّةِ بإكمالِ المُرَبَّعِ.
- حلَّ المُعادلةِ التربيعيَّةِ باستعمالِ القانونِ العامِّ.

مشروعُ الوحدةِ

أَبني مَنجَنيقًا

فكرةُ المشروعِ بناءُ مَنجَنيقٍ، وكتابةُ الاقترانِ الممثِّلِ لحركةِ الكُرةِ المقذوفةِ مِنْهُ، وَحَلُّ المُعادلةِ التربيعيَّةِ المُرتبطةِ بالاقترانِ.

الموادُّ والأدواتُ أعوادُ آيسكريم، سيليكون لاصقٌ، مطّاطاتٌ، غطاءٌ بلاستيكيٌّ، كُرَةٌ مطاطيّةٌ، ساعةٌ مُؤقِّتٍ.

خطواتُ تنفيذِ المشروعِ:

1 أشاهدُ المقطعَ المرئيَّ (الفيديو) في الرَّمزِ المُجاورِ.

2 أنفّذُ خُطواتِ صناعةِ المَنجَنيقِ مِنْ أعوادِ الآيسكريم، كما في المقطعِ المرئيِّ.

3 باستعمالِ المَنجَنيقِ، أُطلِقُ كُرَةً مطاطيّةً بجانبِ حائطٍ، وأحدّدُ أقصى ارتفاعٍ تصلُ إليهِ، وأستعملُ الساعةَ المؤقِّتةَ لأحدّدَ بعدَ كَمْ ثانيةً وصلَتْ إلى سطحِ الأرضِ.

4 أستعملُ المعلوماتِ مِنَ الخُطوةِ السابقةِ لكتابةِ قاعدةِ الاقترانِ التربيعيِّ الممثِّلِ لمُنحنى القطعِ المُكافئِ، الذي يمثّلُ ارتفاعَ الكُرَةِ المطاطيّةِ بالنسبةِ إلى الزّمنِ، وأستعينُ بالصيغةِ: $f(t) = -5t^2 + vt$؛ حيثُ t الزّمنُ بالثواني، وَ $f(t)$ ارتفاعُ الكُرَةِ بالأمتارِ، وَv السرعةُ الابتدائيَّةُ.

5 أبحثُ في شبكةِ الإنترنت عَنْ تصميمَينِ آخَرينِ للمَنجَنيقِ مِنْ أعوادِ الآيسكريم باستعمالِ الكلماتِ المِفتاحيَّةِ: catapult with popsicle sticks، وأتّبعُ الخُطواتِ اللازمةَ لتنفيذِ التصميمَيْنِ.

6 أُطلِقُ الكُرَةَ المطاطيّةَ باستعمالِ كلٍّ مِنَ التصميمَيْنِ، وأنفّذُ الخُطوتَيْنِ 3 وَ 4 مرّةً أُخرى، وأقارنُ بينَ الاقتراناتِ الناتجةِ مِنْ حيثُ: أقصى ارتفاعٍ، والمدَّةُ التي بَقِيَتْ فيها الكُرَةُ في الهواءِ.

7 أكتبُ المُعادلةَ التربيعيَّةَ الخاصَّةَ بكلِّ تصميمٍ منَ التصاميمِ الثلاثةِ، وَأَحُلُّها باستعمالِ الطرائقِ الآتيةِ (إنْ أمكنَ): التمثيلُ البيانيُّ، والتحليلُ، وإكمالُ المُربَّعِ، والقانونُ العامُّ، وأبيّنُ أيَّ الطرائقِ لا يمكنُ حلُّ المُعادلاتِ التربيعيَّةِ بها.

عرضُ النتائجِ:

أُعِدُّ عرضًا تقديميًّا أبيّنُ فيهِ خُطواتِ تنفيذِ المشروعِ موضَّحةً بالصورِ، وبعضَ الصعوباتِ التي واجهتُها في أثناءِ العملِ.

الدرس 1

حلُّ المُعادلاتِ التربيعيَّةِ بيانِيًّا
Solving Quadratic Equations by Graphing

فكرةُ الدرسِ حلُّ المُعادلةِ التربيعيَّةِ بيانيًّا.

المصطلحاتُ المُعادلةُ التربيعيَّةُ، جذورُ المُعادلةِ، أصفارُ الاقترانِ.

مسألةُ اليومِ يمثّلُ الاقترانُ $h(t) = -5t^2 + 10t$ ارتفاعَ دولفينٍ بالمترِ فوقَ سطحِ الماءِ بعدَ t ثانيةً مِنْ ظهورِهِ فوقَ هذا السطحِ. كمْ ثانيةً يبقى الدولفينُ خارجَ الماءِ؟

حلُّ المُعادلةِ التربيعيَّةِ بيانيًّا

المُعادلةُ التربيعيَّةُ (quadratic equation) مُعادلةٌ يمكنُ كتابتُها على الصورةِ: $ax^2 + bx + c = 0$، حيث $a \neq 0$، والتي تُسمّى الصورةَ القياسيَّةَ للمُعادلةِ التربيعيَّةِ، ولكلِّ مُعادلةٍ تربيعيَّةٍ اقترانٌ تربيعيٌّ مُرتبطٌ بها يمكنُ الحصولُ عليهِ بوضعِ $f(x)$ بدلًا مِنَ العددِ 0

الاقترانُ التربيعيُّ المُرتبطُ بالمُعادلةِ	المُعادلةُ التربيعيَّةُ
$f(x) = 2x^2 - 3x + 8$	$2x^2 - 3x + 8 = 0$

يمكنُ حلُّ المُعادلةِ التربيعيَّةِ بتحديدِ قِيَمِ x التي يقطعُ عندها منحنى الاقترانِ التربيعيِّ المُرتبطِ بالمُعادلةِ المحورَ x، وتُسمّى تلكَ القِيَمُ **جذورَ المُعادلةِ** (roots of the equation) أو **أصفارَ الاقترانِ** (zeros of the function).

أتعلَّمُ
يمكنُ أنْ يكونَ للمُعادلةِ التربيعيَّةِ حلّانِ حقيقيانِ مختلفانِ، أوْ حلٌّ حقيقيٌّ واحدٌ، أوْ ألّا يكونَ لها حلولٌ حقيقيَّةٌ.

يمكنُ حلُّ المُعادلةِ التربيعيَّةِ بيانيًّا باتِّباعِ الخُطواتِ الآتيةِ:

مفهومٌ أساسيٌّ **حلُّ المُعادلةِ التربيعيَّةِ بيانيًّا**

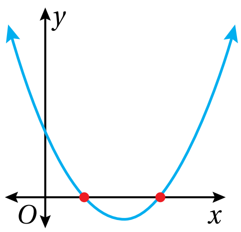
لحلِّ المُعادلاتِ التربيعيَّةِ بيانيًّا أتّبعُ الخُطواتِ الآتيَةَ:

الخُطوةُ 1: أكتبُ المُعادلةَ بالصورةِ القياسيَّةِ $ax^2 + bx + c = 0$

الخُطوةُ 2: أمثّلُ بيانيًّا الاقترانَ التربيعيَّ المُرتبطَ بالمُعادلةِ وَهُوَ: $f(x) = ax^2 + bx + c$

الخُطوةُ 3: أجِدُ قِيَمَ x التي يقطعُ عندَها مُنحنى الاقترانِ المُرتبطِ المحورَ x، إنْ وُجِدَتْ، وَهِيَ أصفارُ الاقترانِ المُرتبطِ، التي تُعَدُّ حلولَ المُعادلةِ.

حلُّ المُعادلةِ التربيعيّةِ بيانيًّا: حلّانِ حقيقيانِ مختلفانِ



يكونُ للمُعادلةِ التربيعيَّةِ حلّانِ حقيقيانِ، إذا قطعَ مُنحنى الاقترانِ التربيعيِّ المُرتبطِ المحورَ x في نقطتَيْنِ مختلفتَينِ، كما في الشكلِ المُجاورِ.

مثال 1

أَحُلُّ المُعادلةَ $x^2 + 2x = 3$ بيانيًّا.

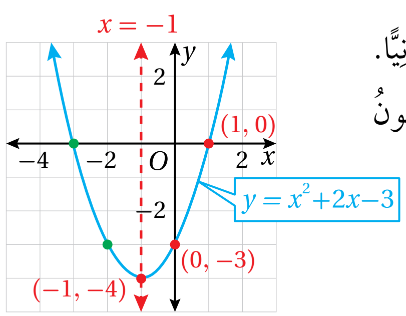
الخُطوةُ 1: أكتبُ المُعادلةَ بالصورةِ القياسيَّةِ، ثمَّ أكتبُ الاقترانَ التربيعيَّ المُرتبطَ بالمُعادلةِ.

$$x^2 + 2x = 3$$ المُعادلةُ المُعطاةُ

$$x^2 + 2x - 3 = 0$$ بطرحِ 3 مِنْ طرفَيِ المُعادلةِ

إذنْ، الاقترانُ التربيعيُّ المُرتبطُ بالمُعادلةِ: $f(x) = x^2 + 2x - 3$

الخُطوةُ 2: أمثِّلُ الاقترانَ التربيعيَّ المُرتبطَ بالمُعادلةِ بيانيًّا.



- بمـا أنَّ $a > 0$، فالتمثيلُ البيانيُّ للقطعِ المُكافِئِ يكونُ مفتوحًا للأعلى.
- مُعادلةُ محورِ التَّماثُلِ: $x = -1$
- إحداثيّا الرأسِ: $(-1, -4)$
- نقطةُ تقاطعِ الاقترانِ معَ المحورِ y، هِيَ: $(0, -3)$، ونقطةٌ أُخرى تقعُ في الجانبِ الذي يقعُ فيهِ المقطعُ y من محورِ التماثلِ وهي مثلًا: $(1, 0)$.
- أمثِّلُ الرأسَ والنقطتَيْنِ في المُستوى الإحداثيِّ، ثمَّ أستعملُ التَّماثُلَ لأعكِسَهُما.

الخُطوةُ 3: أَجِدُ القِيَمَ التي يقطعُ عندَها المُنحنى المحورَ x.

يقطعُ المُنحنى المحورَ x عندَ $-3, 1$

إذنْ، للمُعادلةِ جذرانِ، هُما: $x = -3, x = 1$

التحقُّقُ: أتحقّقُ مِنْ صِحَّةِ كلٍّ مِنَ الحلَّيْنِ بالتعويضِ في المُعادلةِ الأصليَّةِ.

$x^2 + 2x = 3$	المُعادلةُ المُعطاةُ	$x^2 + 2x = 3$
$(1)^2 + 2(1) \stackrel{?}{=} 3$	بالتعويضِ $x = -3$ or $x = 1$	$(-3)^2 + 2(-3) \stackrel{?}{=} 3$
$3 = 3$ ✓	بالتبسيطِ	$3 = 3$ ✓

أتذكَّرُ

القطعُ المُكافِئُ مفتوحٌ للأعلى إذا كانَتْ $a > 0$ ومفتوحٌ للأسفلِ إذا كانَتْ $a < 0$.

أتذكَّرُ

مُعادلةُ محورِ التَّماثُلِ لمنحنى الاقترانِ التربيعيِّ $f(x) = ax^2 + bx + c$؛ حيثُ $a \neq 0$ هي $x = -\frac{b}{2a}$، وإحداثيّا رأسِهِ $\left(-\frac{b}{2a}, f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$.

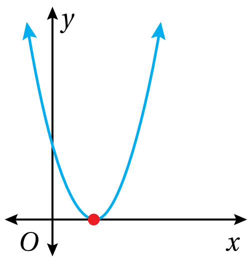
> **إرشادٌ**
>
> أستعملُ أوراقَ الرسمِ البيانيِّ الموجودةَ في نهايةِ كتابِ التمارينِ.

أتحقَّقُ مِنْ فهمي

أَحُلُّ المُعادلةَ $2x^2 - 2 = 0$ بيانيًّا.

حلُّ المُعادلةِ التربيعيَّةِ بيانيًّا: حلٌّ حقيقيٌّ واحدٌ.

يكونُ للمُعادلةِ التربيعيَّةِ حلٌّ حقيقيٌّ واحدٌ إذا قطعَ مُنحنى الاقترانِ التربيعيِّ المُرتبطِ المحورَ x في نقطةٍ واحدةٍ فقط، كما في الشكلِ المُجاورِ.



مثال 2

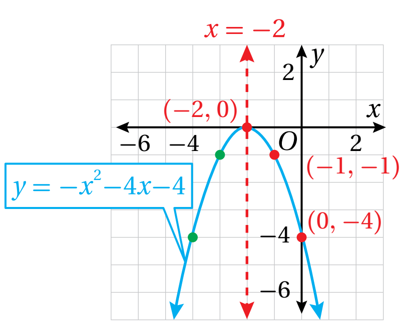
أَحُلُّ المُعادلةَ $-x^2 - 4x - 4 = 0$ بيانيًّا.

الخُطوةُ 1: أكتبُ المُعادلةَ بالصورةِ القياسيَّةِ، ثمَّ أكتبُ الاقترانَ التربيعيَّ المُرتبطَ بالمُعادلةِ.

ألاحظُ أنَّ المُعادلةَ مكتوبةٌ بالصورةِ القياسيَّةِ. إذنْ، الاقترانُ التربيعيُّ المُرتبطُ بالمُعادلةِ:

$$f(x) = -x^2 - 4x - 4$$

الخُطوةُ 2: أمثّلُ الاقترانَ المُرتبطَ بالمُعادلةِ بيانيًّا.



- بما أنَّ $a < 0$، فالتمثيلُ البيانيُّ للقطعِ المُكافِئِ يكونُ مفتوحًا للأسفلِ.
- مُعادلةُ محورِ التَّماثُلِ: $x = -2$
- إحداثيّا الرأسِ: $(-2, 0)$
- نقطةُ تقاطعِ الاقترانِ معَ المحورِ y، هِيَ: $(0, -4)$، ونقطةٌ أُخرى تقعُ في الجانبِ الذي يقعُ فيه المقطعُ y من محورِ التماثلِ وهي مثلًا: $(-1, -1)$.
- أمثّلُ الرأسَ والنقطتَيْنِ في المُستوى الإحداثيِّ، ثمَّ أستعملُ التَّماثُلَ لأعكِسَهُما.

الخُطوةُ 3: أجدُ القِيَمَ التي يقطعُ عندَها المُنحنى المحورَ x.

يقطعُ المُنحنى المحورَ x عندَ -2

إذنْ، للمُعادلةِ جذرٌ وحيدٌ، هُوَ: $x = -2$

> **أتعلَّمُ**
>
> أُلاحِظُ أنَّ الإحداثيَّ x لرأسِ القطعِ هُوَ حلُّ المُعادلةِ الوحيدُ، عندما يكونُ للمعادلةِ حَلٌّ واحدٌ فقط.

التحقُّقُ: أتحقَّقُ مِنْ صِحَّةِ الحلِّ الوحيدِ بالتعويضِ في المُعادلةِ الأصليَّةِ.

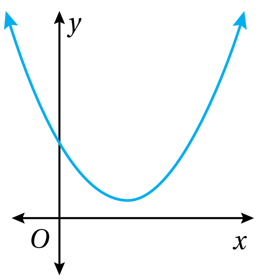
المُعادلةُ المُعطاةُ	$-x^2 - 4x - 4 = 0$
بالتعويضِ $x = -2$	$-(-2)^2 - 4(-2) - 4 \stackrel{?}{=} 0$
بالتبسيطِ	$0 = 0$ ✓

أتحقَّقُ مِنْ فهمي

أَحُلُّ المُعادلةَ $x^2 - 8x = -16$ بيانيًّا.

حلُّ المُعادلةِ التربيعيَّةِ بيانيًّا: لا توجدُ حلولٌ حقيقيَّةٌ.

لا يكونُ للمُعادلةِ التربيعيَّةِ حلٌّ حقيقيٌّ إذا لمْ يقطَعْ مُنحنى الاقترانِ التربيعيِّ المُرتبطِ بالمُعادلةِ التربيعيَّةِ المحورَ x، كما في الشكلِ المُجاورِ.



مثال 3

أَحُلُّ المُعادلةَ $x^2 + 2x + 4 = 0$ بيانيًّا.

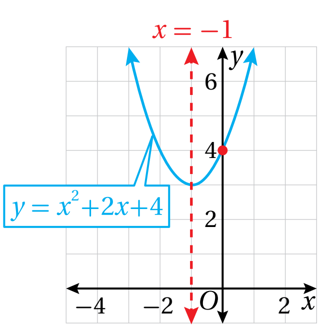
الخُطوةُ 1: أكتبُ المُعادلةَ بالصورةِ القياسيَّةِ، ثمَّ أكتبُ الاقترانَ التربيعيَّ المُرتبطَ بالمُعادلةِ.

أُلاحِظُ أنَّ المُعادلةَ مكتوبةٌ بالصورةِ القياسيَّةِ. إذنْ، الاقترانُ التربيعيُّ المُرتبطُ بالمُعادلةِ:

$$f(x) = x^2 + 2x + 4$$

الخُطوةُ 2: أُمثِّلُ الاقترانَ المُرتبطَ بالمُعادلةِ بيانيًّا.

- بما أنَّ $a > 0$، فالتمثيلُ البيانيُّ للقطعِ المُكافِئِ يكونُ مفتوحًا للأعلى.
- مُعادلةُ محورِ التَّماثُلِ: $x = -1$
- إحداثيّا الرأسِ: $(-1, 3)$
- نقطــةُ تقاطعِ الاقترانِ معَ المحورِ y، هِيَ: $(0, 4)$، ونقطةٌ أُخرى تقعُ في الجانبِ الذي يقعُ فيهِ المقطعُ y من محورِ التماثلِ وهي مثلًا: $(1, 7)$.
- أُمثِّلُ الرأسَ والنقطتَيْنِ في المُستوى الإحداثيِّ، ثمَّ أستعملُ التَّماثُلَ لأعكِسَهُما.



الخُطوة 3: أَجِدُ القِيَمَ التي يقطعُ عندها المُنحنى المحورَ x.

أُلاحِظُ أنَّ التمثيلَ البيانِيَّ للاقترانِ المُرتبطِ لا يقطعُ المحورَ x.

إذنْ، لا يوجدُ جذرٌ حقيقيٌّ للمُعادلةِ.

أتحقَّقُ مِنْ فهمي

أَحُلُّ المُعادلةَ $x^2 + 5 = 4x$ بيانِيًّا.

إرشادٌ

أستعملُ أوراقَ الرسمِ البيانيِّ الموجودةَ في نهايةِ كتابِ التمارينِ.

يأخذُ مسارُ بعضِ المقذوفاتِ شكلَ القطعِ المُكافِئِ؛ لِذا يمكنُ استعمالُ خصائصِ الاقتراناتِ التربيعيَّةِ لتحديدِ زمنِ بقاءِ المقذوفِ في الهواءِ والمسافةِ الأفقيَّةِ التي يقطعُها.

مثال 4 : مِنَ الحياةِ

نوافيرُ: يمثِّلُ الاقترانُ $h(x) = 3x - x^2$ ارتفاعَ قطرةِ ماءٍ مُتدفِّقةٍ مِنْ فُوَّهَةِ نافورةٍ بالأمتارِ عندما تكونُ على بُعدِ x مترًا مِنَ الفُوَّهَةِ. أستعملُ التمثيلَ البيانيَّ لِأَجِدَ أبعدَ نقطةٍ أُفقيَّةٍ تصلُ إليها قطرةُ الماءِ.

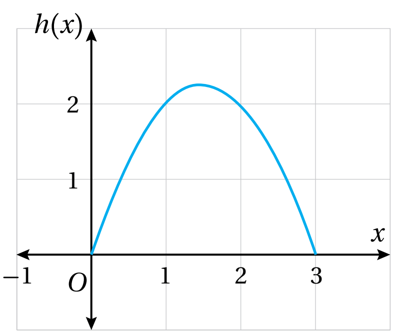
معلومةٌ

برعَ المهندسونَ المسلمونَ في العصرِ الأندلسيِّ في تصميمِ النوافيرِ، وابتكروا لها طرائقَ ميكانيكيَّةً مُعقَّدَةً لِضَخِّ الماءِ مِنْ غيرِ مُحرِّكاتٍ.

يكونُ ارتفاعُ قطرةِ الماءِ عندَ خُروجِها مِنْ فُوَّهَةِ النافورةِ 0 m، ويكونُ ارتفاعُها 0 m عندَ عودتِها إلى سطحِ الأرضِ؛ لِذا فإنَّ أبعدَ نقطةٍ أُفقيَّةٍ تَصِلُها قطرةُ الماءِ تكونُ عندما يقطعُ الاقترانُ $h(x) = 3x - x^2$ المحورَ x.

إذنْ، أَحُلُّ المُعادلةَ $3x - x^2 = 0$ بيانيًّا لأحدِّدَ هاتَينِ القيمتَينِ.

الخُطوةُ 1: أمثِّلُ الاقترانَ $h(x) = 3x - x^2$ بيانِيًّا.



الخُطوةُ 2: أَجِدُ القِيَمَ التي يقطعُ عندَها المُنحنى المحورَ x.

أُفَكِّرُ

لماذا اكْتُفِيَ بتمثيلِ الاقترانِ فوقَ المحورِ x الموجبِ؟

بما أنَّ المقطعَ x للاقترانِ هُوَ 3، فإنَّ أبعدَ نقطةٍ تصلُ إليها قطرةُ الماءِ هيَ على بُعدِ 3 m مِنَ النافورةِ.

أتحقَّقُ مِنْ فهمي

فيزياءُ: في تجربةٍ فيزيائيَّةٍ، قَذَفَتْ صفاءُ كتلةً إلى الأعلى، فمثَّلَ الاقترانُ $h(t) = -5t^2 + 20t$ ارتفاعَ هذهِ الكتلةِ بالأمتارِ، بعدَ t ثانيةً مِنْ قذفِها. أستعملُ التمثيلَ البيانيَّ لِأَجِدَ زمنَ بقاءِ الكتلةِ في الهواءِ.

أتدرَّبُ وأحُلُّ المسائلَ

أَحُلُّ كُلًّا مِنَ المُعادلاتِ الآتيةِ بيانيًّا:

1) $x^2 - 9 = 0$

2) $x^2 - 5x = 0$

3) $-12x^2 = 16$

4) $-x^2 + 12x = 36$

5) $x^2 - 6x + 9 = 0$

6) $x^2 - 6x = 7$

7) $x^2 + x - 6 = 0$

8) $x^2 = 6x - 8$

9) $-x^2 + 4 = 3x$

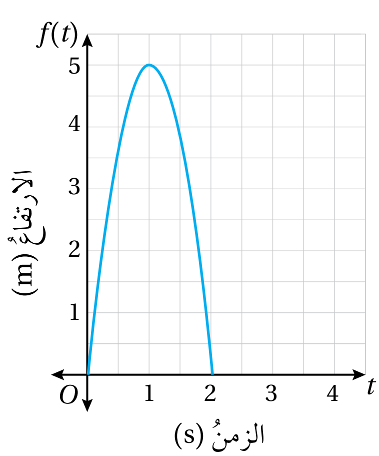
10) $x^2 + 3x + 6 = 0$

11) $2x^2 - 5x = -6$

12) $2x^2 + 32 = -20x$

إرشادٌ: أستعملُ أوراقَ الرسمِ البيانيِّ الموجودةَ في نهايةِ كتابِ التمارينِ.

رياضةٌ: يبيِّنُ الشكلُ المُجاورُ ارتفاعَ لاعبِ جُمبازٍ $f(t)$ بالأمتارِ بعدَ t ثانيةً مِنْ وثبِهِ عَنْ سطحِ الأرضِ.



13) كَمْ ثانيةً بَقِيَ اللاعبُ في الهواءِ؟

14) ما أقصى ارتفاعٍ وصلَ إليهِ اللاعبُ؟

15) هلْ يمثِّلُ الاقترانُ $f(t) = -5t^2 + 10t$ حركةَ لاعبِ الجُمبازِ؟ أبرِّرُ إجابتي.

16 **طيورٌ:** التقطَ نَسـرٌ سمكةً مِنْ بُحيرةٍ وطارَ بها، وعندما وصلَ إلى ارتفاعِ 9 m تمكَّنَتِ السمكةُ مِنَ التَّحَرُّرِ لِتَسقُطَ مرَّةً أُخرى في البُحيرة. إذا عَلِمْتُ أنَّ الاقترانَ $h(t) = -5t^2 + 9$ يمثّلُ ارتفاعَ السمكةِ بالأمتارِ بعدَ t ثانيةً مِنْ سقوطِها، فأستعملُ التمثيلَ البيانيَّ لِأَجِدَ زمنَ بقاءِ السمكةِ في الهواءِ.

مهاراتُ التفكيرِ العُليا

17 **أكتشِفُ المختلفَ:** أيُّ المُعادلاتِ الآتيةِ مختلفةٌ؟ أبرّرُ إجابتي.

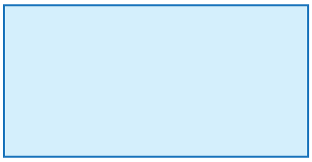
$x^2 - 2x - 3 = 0$

$x^2 - 6x + 8 = 0$

$x^2 + 5x - 6 = 0$

$x^2 + 2x - 3 = 0$

18 **تبريرٌ:** يبيّنُ الشكلُ الآتي مستطيلًا مساحتُهُ $50\ m^2$. أستعملُ التمثيلَ البيانِيَّ لِأَجِدَ قيمةَ x، وأبرّرُ إجابتي.



مسألةٌ مفتوحةٌ: أكتبُ مُعادلةً تُحَقِّقُ الوصفَ المُعطى في كلٍّ ممّا يأتي:

19 مُعادلةٌ تربيعيَّةٌ ليسَ لها جذرٌ حقيقيٌّ.

20 مُعادلةٌ تربيعيَّةٌ لها جذرٌ حقيقيٌّ واحدٌ.

21 مُعادلةٌ تربيعيَّةٌ لها جذرانِ صحيحانِ موجبانِ.

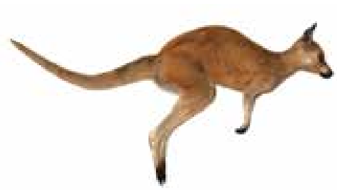
الدرسُ 2

حلُّ المُعادلاتِ التربيعيَّةِ بالتحليلِ
Solving Quadratic Equations by Factoring

فكرةُ الدرسِ حلُّ المُعادلاتِ التربيعيَّةِ بالتحليلِ.

المصطلحاتُ خاصيَّةُ الضَّربِ الصِّفريِّ.

مسألةُ اليومِ يمثِّلُ الاقتـرانُ $h(t) = -16t^2 + 7t$ ارتفـاعَ كنغرٍ بالقدمِ فوقَ سطحِ الأرضِ بعدَ t ثانيةً مِنْ قفزِهِ. كمْ ثانيةً تقريبًا يحتاجُ الكنغرُ ليعودَ إلى سطحِ الأرضِ؟



حلُّ المُعادلاتِ التربيعيَّةِ بالتحليلِ، وبخاصيَّةِ الضَّربِ الصِّفريِّ.

تعلَّمتُ في الدرسِ السـابقِ حلَّ المُعـادلاتِ التربيعيَّةِ بيانيًّا، وسـأتعلَّمُ في هذا الدرسِ حلَّها جبريًّا.

أتأمَّلُ كُلًّا مِنَ الجُملِ الآتيةِ:

$$6\,(0) = 0 \qquad 0(-5) = 0 \qquad (7-7)(0) = 0$$

أُلاحِظُ أنَّ أحدَ العامليْنِ على الأقلِّ في كلِّ حالةٍ ممّا سبقَ يُساوي صِفرًا؛ لِذا فإنَّ حاصلَ ضربِهِما يُساوي صِفرًا، وهذا ما يُسَمّى **بخاصيَّةِ الضَّربِ الصِّفريِّ** (zero–product property).

مفهومٌ أساسيٌّ — خاصيَّةُ الضَّربِ الصِّفريِّ

بالكلماتِ: إذا كانَ حاصلُ ضربِ عددَيْنِ حقيقيَّيْنِ يُسـاوي صِفرًا، فإنَّ أحدَهُما على الأقلِّ يجبُ أنْ يكونَ صِفرًا.

بالرُّموزِ: إذا كانَ a وَ b عددَيْنِ حقيقيَّيْنِ، وكانَ $ab = 0$، فإنَّ:

$$a = 0 \quad \text{or} \quad b = 0$$

يمكنُ اسـتعمالُ خاصيَّةِ الضَّربِ الصِّفريِّ والتحليلِ لحلِّ المُعادلاتِ التربيعيَّةِ، فإذا كانَ أحدُ طرفَيْ مُعادلـةٍ مكتوبًا بالصورةِ التحليليَّـةِ، والطرفُ الآخَرُ هُوَ 0، فيمكنُ اسـتعمالُ خاصيَّةِ الضَّربِ الصِّفريِّ لحلِّها.

أتذكَّرُ

كتابـةُ مقـدارٍ جبـريٍّ بالصـورةِ التحليليَّةِ يعني تحليلَهُ تحليلًا كاملًا.

مثلُ:

- $x^2 + 5x = x\,(x + 5)$
- $x^2 + 3x + 2 = (x + 2)(x + 1)$

حلُّ المُعادلةِ التربيعيَّةِ بالتحليلِ

مفهومٌ أساسيٌّ

لحلِّ المُعادلاتِ التربيعيَّةِ بالتحليلِ، أتّبعُ الخُطواتِ الآتيةَ:

الخُطوةُ 1: أنقلُ جميعَ الحدودِ إلى الطرفِ الأيسرِ مِنَ المُعادلةِ، وأتركُ الصِّفرَ في الطرفِ الأيمنِ.

الخُطوةُ 2: أحلّلُ المقدارَ الجبريَّ في الطرفِ الأيسرِ مِنَ المُعادلةِ على صورةِ حاصلِ ضربِ عاملَيْنِ.

الخُطوةُ 3: أُساوي كلَّ عاملٍ بالصِّفرِ (خاصيَّةُ الضَّربِ الصِّفريِّ)، وَأَحُلُّ كلَّ مُعادلةٍ خطيَّةٍ.

الخُطوةُ 4: حلولُ المُعادلةِ التربيعيَّةِ هِيَ حلولُ المعادلتَينِ الخطّيّتَينِ.

أتذكَّرُ

إخراجُ العاملِ المُشتَرَكِ الأكبرِ لِحدودِ مقدارٍ جبريٍّ هِيَ عمليَّةٌ عكسيَّةٌ لعمليَّةِ التوزيعِ.

حلُّ المُعادلاتِ التربيعيَّةِ بالتحليلِ: إخراجُ العاملِ المُشترَكِ الأكبرِ

تعلَّمتُ سابقًا أنَّهُ يمكنُ تحليلُ المقدارِ الجبريِّ بإخراجِ العاملِ المُشتَرَكِ الأكبرِ لِحُدودِهِ، ويمكنُ استعمالُ هذهِ الطريقةِ مِنَ التحليلِ لحلِّ المُعادلاتِ التربيعيَّةِ، كما في المثالِ الآتي:

مثال 1

أَحُلُّ كُلًّا مِنَ المُعادلاتِ الآتيةِ:

1 $x^2 = -5x$

$x^2 = -5x$	المُعادلةُ المُعطاةُ
$x^2 + 5x = 0$	بجمعِ $5x$ إلى طرفَيِ المُعادلةِ
$x(x+5) = 0$	بإخراجِ العاملِ المُشترَكِ الأكبرِ
$x = 0 \quad \text{or} \quad x+5=0$	خاصيَّةُ الضَّربِ الصِّفريِّ
$x = -5$	بحلِّ كلِّ مُعادلةٍ

إذنْ، الجذرانِ هُما: $0, -5$

التحقُّق: أعوّضُ قيمتَيْ x في المُعادلةِ الأصليَّةِ.

عندما $x = -5$	عندما $x = 0$
$x^2 = -5x$	$x^2 = -5x$
$(-5)^2 \stackrel{?}{=} -5(-5)$	$(0)^2 \stackrel{?}{=} -5(0)$
$25 = 25$ ✓	$0 = 0$ ✓

2 $6x^2 = 20x$

المُعادلةُ المُعطاةُ: $6x^2 = 20x$

بطرحِ $20x$ مِنْ طرفَيِ المُعادلةِ: $6x^2 - 20x = 0$

بإخراجِ العاملِ المُشترَكِ الأكبرِ: $2x(3x - 10) = 0$

خاصيَّةُ الضَّربِ الصِّفريِّ: $2x = 0$ or $3x - 10 = 0$

بحلِّ كلِّ مُعادلةٍ: $x = 0$ $\quad x = \frac{10}{3}$

إذنْ، الجذرانِ هُما: $0, \frac{10}{3}$

التحقُّق: أعوّضُ قيمتَيْ x في المُعادلةِ الأصليَّةِ.

أتحقَّقُ مِنْ فهمي

أحلُّ كُلًّا مِنَ المُعادلاتِ الآتيةِ:

a) $x^2 - 3x = 0$

b) $8x^2 = -12x$

أتذكَّرُ

لتحليلِ ثلاثيٍّ حدودٍ على الصورةِ $x^2 + bx + c$، أبحثُ عنْ عددَيْنِ صحيحَيْنِ m وَ n مجموعُهُما يُساوي b، وحاصلُ ضربِهِما يُساوي c، ثُمَّ أكتبُ على الصورةِ x^2+bx+c على الصورة $(x+m)(x+n)$.

حلُّ المُعادلاتِ التربيعيَّةِ بالتحليلِ: الصورة $x^2 + bx + c = 0$

إذا كانَ المقدارُ الجبريُّ $x^2 + bx + c$ قابلًا للتحليلِ، فيمكنُ أيضًا استعمالُ خاصيَّةِ الضَّربِ الصِّفريِّ لحلِّ المُعادلةِ التربيعيَّةِ المكتوبةِ بالصورةِ القياسيَّةِ $x^2 + bx + c = 0$.

مثال 2

أَحُلُّ كُلًّا مِنَ المُعادلاتِ الآتيةِ:

1 $x^2 + 6x + 8 = 0$

$x^2 + 6x + 8 = 0$	المُعادلةُ المُعطاةُ
$(x + 4)(x + 2) = 0$	بالتحليلِ إلى العواملِ
$x + 4 = 0$ or $x + 2 = 0$	خاصيَّةُ الضَّربِ الصِّفريِّ
$x = -4$ $\quad x = -2$	بحلِّ كلِّ مُعادلةٍ

إذنْ، الجذرانِ هُما: $-4, -2$

التحقُّقُ: أعوِّضُ قيمتَيْ x في المُعادلةِ الأصليَّةِ.

2 $x^2 - 8x + 12 = 0$

$x^2 - 8x + 12 = 0$	المُعادلةُ المُعطاةُ
$(x - 6)(x - 2) = 0$	بالتحليلِ إلى العواملِ
$x - 6 = 0$ or $x - 2 = 0$	خاصيَّةُ الضَّربِ الصِّفريِّ
$x = 6$ $\quad x = 2$	بحلِّ كلِّ مُعادلةٍ

إذنْ، الجذرانِ هُما: $6, 2$

التحقُّقُ: أعوِّضُ قيمتَيْ x في المُعادلةِ الأصليَّةِ.

3 $x^2 + 5x = 6$

$x^2 + 5x = 6$	المُعادلةُ المُعطاةُ
$x^2 + 5x - 6 = 0$	بطرحِ 6 مِنْ طرفَيِ المُعادلةِ
$(x - 1)(x + 6) = 0$	بالتحليلِ إلى العواملِ
$x - 1 = 0$ or $x + 6 = 0$	خاصيَّةُ الضَّربِ الصِّفريِّ
$x = 1$ $\quad x = -6$	بحلِّ كلِّ مُعادلةٍ

إذنْ، الجذرانِ هُما: $1, -6$

التحقُّقُ: أعوِّضُ قيمتَيْ x في المُعادلةِ الأصليَّةِ.

أتحقَّقُ مِنْ فهمي أحلُّ كُلًّا مِنَ المُعادلاتِ الآتيةِ:

a) $x^2 + 7x = -6$ b) $x^2 - 9x + 8 = 0$ c) $x^2 - 4x - 21 = 0$

أتذكَّرُ

بما أنَّ $b = 6, c = 8$، فأبحثُ عنْ عددَيْنِ صحيحَيْنِ موجبَيْنِ مجموعُهُما 6 وحاصلُ ضربِهِما 8

أتذكَّرُ

بما أنَّ $b = -8, c = 12$، فأبحثُ عنْ عددَيْنِ صحيحَيْنِ سالِبَيْنِ مجموعُهُما -8 وحاصلُ ضربِهِما 12

أتذكَّرُ

بما أنَّ $b = 5, c = -6$، فأبحثُ عنْ عددَيْنِ صحيحَيْنِ مُختلِفَيْنِ في الإشارةِ مجموعُهُما 5 وحاصلُ ضربِهِما -6

حلُّ المُعادلاتِ بالتحليلِ: الصورة $ax^2 + bx + c = 0$

يمكنُ حلُّ المُعادلاتِ التربيعيَّةِ على الصورةِ $ax^2 + bx + c = 0$، حيثُ $a \neq 0$، و a وَ b وَ c أعدادٌ صحيحةٌ، بالتحليلِ أوّلًا، ثمَّ استعمالِ خاصيَّةِ الضَّربِ الصِّفريِّ.

مثال 3

أَحُلُّ كُلًّا مِنَ المُعادلاتِ الآتيةِ:

1 $\mathbf{3x^2 - 4x + 1 = 0}$

$3x^2 - 4x + 1 = 0$	المُعادلةُ المُعطاةُ
$(3x - 1)(x - 1) = 0$	بالتحليلِ إلى العواملِ
$3x - 1 = 0 \quad \text{or} \quad x - 1 = 0$	خاصيَّةُ الضَّربِ الصِّفريِّ
$x = \frac{1}{3} \qquad\qquad x = 1$	بحلِّ كلِّ مُعادلةٍ

إذنْ، الجذرانِ هُما: $1 , \frac{1}{3}$

2 $\mathbf{30x^2 - 5x = 5}$

$30x^2 - 5x = 5$	المُعادلةُ المُعطاةُ
$30x^2 - 5x - 5 = 0$	بطرحِ 5 مِنْ طرفَيِ المُعادلةِ
$6x^2 - x - 1 = 0$	بِقسمةِ طرفَيِ المُعادلةِ على 5
$(3x + 1)(2x - 1) = 0$	بالتحليلِ إلى العواملِ
$3x+1 = 0 \quad \text{or} \quad 2x-1 = 0$	خاصيَّةُ الضَّربِ الصِّفريِّ
$x = -\frac{1}{3} \qquad\qquad x = \frac{1}{2}$	بحلِّ كلِّ مُعادلةٍ

إذنْ، الجذرانِ هُما: $\frac{1}{2} , -\frac{1}{3}$

أتحقَّقُ مِنْ فهمي

أحلُّ كُلًّا مِنَ المُعادلاتِ الآتيةِ:

a) $2x^2 - 5x + 2 = 0$

b) $2x^2 + 6x = -4$

أتذكَّرُ

إذا كانتْ إشارةُ c موجبةً، وَإشارةُ b سالبةً في ثُلاثيِّ الحدودِ $ax^2 + bx + c$، حيثُ $a > 0$، و a وَ b وَ c أعدادٌ صحيحةٌ، فإنَّ إشارةَ كلٍّ مِنْ m وَ n سالبةٌ.

أتذكَّرُ

أحرِصُ دائمًا على إخراجِ العاملِ المُشترَكِ الأكبرِ أوّلًا قبلَ البدءِ بعمليَّةِ التحليلِ.

حلُّ المُعادلاتِ التربيعيَّةِ بالتحليلِ: الفرقُ بينَ مُرَبَّعَيْنِ

يمكنُ استعمالُ خاصيَّةِ الضَّربِ الصِّفريِّ والتحليلِ لحلِّ مُعادلاتٍ تربيعيَّةٍ تتضمَّنُ فرقًا بينَ مربّعَينِ في أحدِ طرفَيْها، وصفرًا في طرفِها الآخَرِ.

مثال 4

أحلُّ كُلًّا مِنَ المُعادلاتِ الآتيةِ:

1 $x^2 - 36 = 0$

$x^2 - 36 = 0$ المُعادلةُ المُعطاةُ

$(x-6)(x+6) = 0$ بتحليلِ الفرقِ بينَ مربّعَينِ

$x - 6 = 0$ or $x + 6 = 0$ خاصيَّةُ الضَّربِ الصِّفريِّ

$x = 6$ $\quad x = -6$ بحلِّ كلِّ مُعادلةٍ

إذنْ، الجذرانِ هُما: $-6, 6$

التحقُّقُ: أعوّضُ قيمتَيْ x في المُعادلةِ الأصليَّةِ.

2 $8x^2 - 50 = 0$

$8x^2 - 50 = 0$ المُعادلةُ المُعطاةُ

$4x^2 - 25 = 0$ بقسمةِ طرفَي المُعادلةِ على 2

$(2x-5)(2x+5) = 0$ بتحليلِ الفرقِ بينَ مربّعَينِ

$2x - 5 = 0$ or $2x + 5 = 0$ خاصيَّةُ الضَّربِ الصِّفريِّ

$x = \frac{5}{2}$ $\quad x = -\frac{5}{2}$ بحلِّ كلِّ مُعادلةٍ

إذنْ، الجذرانِ هُما: $-\frac{5}{2}, \frac{5}{2}$

التحقُّقُ: أعوّضُ قيمتَيْ x في المُعادلةِ الأصليَّةِ.

أتحقَّقُ مِنْ فهمي

أحلُّ كُلًّا مِنَ المُعادلاتِ الآتيةِ:

a) $4x^2 - 1 = 0$ **b)** $2x^2 - 18 = 0$

أتذكَّرُ

الفرقُ بينَ مربّعَيْ حَدَّيْنِ يُساوي ناتجَ ضربِ مجموعِ الحَدَّيْنِ في الفرقِ بينَهُما.

$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$

أتذكَّرُ

يحتاجُ تحليلُ بعضِ المقاديرِ الجبريَّةِ إلى إجراءِ خُطوتَيْنِ، مثلِ: إخراجِ العاملِ المُشتَرَكِ الأكبرِ للحدودِ جميعِها، ثمَّ تحليلِ ما تبقّى مِنَ المقدارِ باستعمالِ تحليلِ الفرقِ بينَ مربّعَينِ، أوْ تحليلِ العبارةِ التربيعيةِ.

حلُّ المُعادلاتِ التربيعيَّةِ باستعمالِ الجذرِ التربيعيّ

تعلَّمتُ سابقًا أنَّهُ يمكنُ حلُّ المُعادلاتِ على الصورةِ $x^2 = c$؛ حيثُ $c \geq 0$، باستعمالِ تعريفِ الجـــذرِ التربيعيِّ للعددِ الموجبِ؛ حيث: $x = \pm\sqrt{c}$، أمّا إذا لمْ تَكُنِ المُعادلةُ التربيعيَّةُ مكتوبةً على الصورةِ $x^2 = c$، فأستـــعملُ العملياتِ الجبريَّةَ لكتابـــةِ x^2 وحدَهُ في أحدِ طرفَي المُعادلةِ أوّلًا، إنْ أمكنَ، ثمَّ أَحُلُّ المُعادلةَ بأخذِ الجذرِ التربيعيِّ لكلِّ طرفٍ.

مثال 5

أحلُّ كُلًّا مِنَ المُعادلاتِ الآتيةِ:

1 $3x^2 - 27 = 0$

$3x^2 - 27 = 0$	المُعادلةُ المُعطاةُ
$3x^2 = 27$	بجمعِ 27 إلى طرفَيِ المُعادلةِ
$x^2 = 9$	بقسمةِ طرفَيِ المُعادلةِ على 3
$x = \pm\sqrt{9}$	بأخذِ الجذرِ التربيعيِّ للطرفَيْنِ
$x = \pm 3$	بالتبسيطِ

إذنْ، الجذرانِ هُما: $3, -3$

التحقُّقُ: للتحقُّقِ، أعوّضُ قيمتَيْ x في المُعادلةِ الأصليةِّ.

2 $(x+4)^2 = 49$

$(x+4)^2 = 49$	المُعادلةُ المُعطاةُ
$x + 4 = \pm\sqrt{49}$	بأخذِ الجذرِ التربيعيِّ للطرفَيْنِ
$x + 4 = \pm 7$	بالتبسيطِ
$x = -4 \pm 7$	بطرحِ 4 مِنْ طرفَيِ المُعادلةِ
$x = -4 + 7$ or $x = -4 - 7$	بفصلِ الحَلَّيْنِ
$x = 3$ or $x = -11$	بالتبسيطِ

إذنْ، الجذرانِ هُما: $3, -11$

التحقُّقُ: للتحقُّقِ، أعوّضُ قيمتَيْ x في المُعادلةِ الأصليَّةِ.

أُفكِّرُ

هلْ يمكنُ حــلُّ الفرعِ 1 مِــنَ المثــالِ 5 بطريقــةٍ أُخرى؟

أتحقَّقُ مِنْ فهمي

أحلُّ كُلًّا مِنَ المُعادلاتِ الآتيةِ:

a) $4x^2 - 100 = 0$

b) $(x-1)^2 = 16$

أتدرَّبُ وأحُلُّ المسائلَ

أحلُّ كُلًّا مِنَ المُعادلاتِ الآتيةِ:

1) $4x^2 + 9x = 0$

2) $7x^2 = 6x$

3) $x^2 + 5x + 4 = 0$

4) $x^2 - 2x - 15 = 0$

5) $x^2 = 17x - 72$

6) $(x+1)^2 = 4$

7) $2m^2 = 50$

8) $\frac{1}{3}x^2 - 3 = 0$

9) $s^2 + 20s + 100 = 0$

10) $9m^2 - 12m + 4 = 0$

11) $18t^2 + 9t + 1 = 0$

12) $5x^2 + 8x + 3 = 0$

13) $4t^2 - 4t - 35 = 0$

14) $9(x-1)^2 = 16$

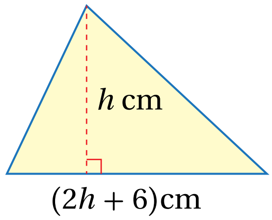
15) $8x(x+1) = 16$

16) $(2x+1)(5x+2) = (2x-2)(x-2)$

17) $8x^2 + 6x + 3 = 2x^2 + x + 2$

18) **فُرشــاةٌ:** سقطتْ فرشاةُ طلاءٍ مِنْ يدِ سـفيانَ. إذا مَثَّلَ الاقترانُ $h(t) = 3 - 5t^2$ ارتفاعَ تلكَ الفُرشاةِ بالأمتارِ عَنِ الأرضِ، بعدَ t ثانيةً مِنْ سُقوطِها، فبعدَ كَمْ ثانيةً تصلُ إلى الأرضِ؟

19) **حديقةٌ:** حديقةٌ مستطيلةُ الشكلِ يزيدُ طولُها على عرضِها بمقدارِ 40 m، ومساحتُها $48000\ m^2$، يريدُ مزارعٌ إحاطتَها بسياجٍ. أجِدُ طولَ السِّياجِ.



20) **هندسةٌ:** يبيّنُ الشكلُ المُجاورُ مثلثًا مِساحتُهُ $40\ cm^2$. أَجِدُ ارتفاعَهُ h، وطولَ قاعدتِهِ.

21 **بطاقةٌ:** بطاقةُ دعوةٍ مســتطيلةُ الشكلِ يزيدُ طولُها على مِثْلَيْ عرضِها بمقدارِ 3 cm إذا كانتْ مِساحتُها $90\ cm^2$، فَأَجِدُ طولَها وعرضَها.

22 أَحُلُّ المسألةَ الواردةَ في بدايةِ الدرسِ.

مهاراتُ التفكيرِ العُليا

23 **أكتشِفُ الخطأَ:** حلَّ سلمانُ ومهنَّدٌ المُعادلةَ التربيعيَّةَ $x^2 - 3x - 4 = 0$، كما هُوَ مُبَيَّنٌ أدناهُ. أيُّهما إجابتُهُ صحيحةٌ؟ أبرِّرُ إجابتي.

سلمانُ

$$x^2 - 3x - 4 = 0$$
$$(x - 4)(x + 1) = 0$$
$$x - 4 = 0 \quad \text{or} \quad x + 1 = 0$$
$$x = 4 \qquad\qquad x = -1$$

مهنَّدٌ

$$x(x - 3) = 4$$
$$x = 4 \quad \text{or} \quad x - 3 = 4$$
$$x = 7$$

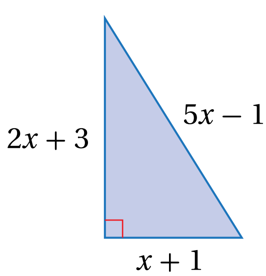
تبريرٌ: أحدِّدُ عددَ حلولِ كلِّ مُعادلةٍ ممّا يأتي مِنْ دونِ حَلِّها، وأبرِّرُ إجابتي:

26 $n^2 - 15 = -15$

25 $a^2 - 12 = 6$

24 $y^2 = -36$

تبريرٌ: يبيِّنُ الشكلُ المُجاوِرُ مثلَّثًا قائمَ الزاويةِ.



27 أبيِّنُ، بالاعتمادِ على الشكلِ، أنَّ $20x^2 - 24x - 9 = 0$، وأبرِّرُ إجابتي.

إرشادٌ: أستعملُ نظريَّةَ فيثاغورس

28 أَجِدُ مساحةَ المثلَّثِ.

29 **تَحَدٍّ:** أَجِدُ جميعَ قِيَمِ الثابتِ k؛ حيثُ يمكنُ تحليلُ ثلاثيِّ الحدودِ $2x^2 + kx + 12$ إلى عامِلَيْنِ باستعمالِ الأعدادِ الصحيحةِ.

الدرس 3

حلُّ المُعادلاتِ التربيعيَّةِ بإكمالِ المُرَبَّعِ

Solving Quadratic Equations by Completing the Square

فكرةُ الدرسِ حلُّ المُعادلاتِ التربيعيَّةِ بإكمالِ المُرَبَّعِ.

المصطلحاتُ إكمالُ المُرَبَّعِ.

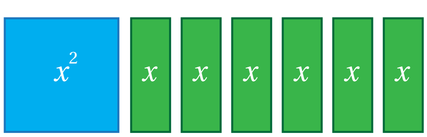
مسألةُ اليومِ ألقى أحمدُ طُعمًا في الماءِ مِنَ ارتفاعِ مترٍ واحدٍ. إذا كانَ الاقترانُ $h(t) = -5t^2 + 8t + 1$ يمثِّلُ ارتفاعَ هذا الطُّعمِ بالمترِ فوقَ سطحِ الماءِ، بعدَ t ثانيةً مِنْ إلقائهِ، فبعدَ كمْ ثانيةً يصلُ إلى سطحِ الماءِ؟

إكمالُ المُرَبَّعِ

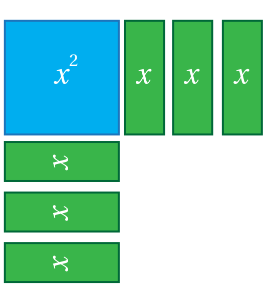
تعلَّمتُ سابقًا حلَّ المُعادلةِ التربيعيَّةِ التي على الصورةِ $(x + m)^2 = n$؛ حيثُ $n \geq 0$، وذلكَ بأخذِ الجذرِ التربيعيِّ لطرفَيِ المُعادلةِ.

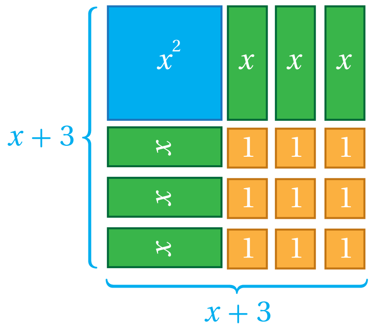
ألاحظُ أنَّ المقدارَ $(x + m)^2$ هُوَ الصورةُ التحليليَّةُ للمُرَبَّعِ الكاملِ $x^2 + 2mx + m^2$، وهذا يقودُنا إلى استنتاجِ أنَّهُ يمكنُ حلُّ المُعادلاتِ التربيعيَّةِ التي تحوي مُرَبَّعًا كاملًا ثلاثيَّ الحدودِ معاملُ x^2 فيهِ يُساوي 1 باستخدامِ الجذرِ التربيعيِّ. ولكنْ، ماذا عَنِ المُعادلاتِ التي لا تحوي مُرَبَّعًا كاملًا؟

تمثِّلُ القطعُ الجبريَّةُ المُجاورةُ المقدارَ الجبريَّ $x^2 + 6x$



ويمكنُ إعادةُ ترتيبِ القطعِ الجبريَّةِ لِتُشكِّلَ جُزءًا مِنْ مُرَبَّعٍ، كما في الشكلِ المُجاورِ. ألاحظُ أنَّ القطعَ الخضراءَ قُسِّمَتْ مجموعتَيْنِ في كلٍّ منها 3 قطعٍ.





يمكنُ إكمالُ المُرَبَّعِ بإضافةِ 3^2 أوْ 9 قطعٍ مفردةٍ.

إذنْ، المُرَبَّعُ الكاملُ ثُلاثِيُّ الحدودِ الناتجُ هُوَ

$(x + 3)^2$ أو $x^2 + 6x + 9$

يمكنُ التعبيرُ عَنِ الخُطواتِ السابقةِ جبريًّا كما يأتي:

$$x^2 + \underset{\uparrow}{6}x + \underset{\uparrow}{9}$$

$$\left[\frac{1}{2}(6)\right]^2$$

وبشكلٍ عامٍّ، يمكنُ تحويلُ المقدارِ التربيعيِّ الذي على الصورةِ $x^2 + bx$ إلى مُرَبَّعٍ كاملٍ ثُلاثيِّ الحدودِ بإضافةِ $\left(\frac{b}{2}\right)^2$، وَتُسَمّى هذهِ العمليَّةُ **إكمالَ المُرَبَّعِ** (completing the square).

مفهومٌ أساسيٌّ

إكمالُ المُرَبَّعِ

بالكلماتِ:

لإكمالِ مُرَبَّعِ أيِّ مقدارٍ تربيعيٍّ على الصورةِ $x^2 + bx$، أتّبعُ الخُطواتِ الآتيةَ:

الخُطوةُ 1: أَجِدُ نصفَ b.

الخُطوةُ 2: أُربّعُ الناتجَ مِنَ **الخُطوةِ 1**

الخُطوةُ 3: أُضيفُ الناتجَ مِنَ **الخُطوةِ 2** إلى $x^2 + bx$.

بالرُّموزِ: $x^2 + bx + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2$

أتعلَّمُ

أتّبعُ الخُطواتِ نفسَها، سواءٌ كانتْ b موجبةً أوْ سالبةً.

مثال 1

أجعلُ كلَّ مقدارٍ ممّا يأتي مُرَبَّعًا كاملًا، ثمَّ أحلّلُ المُرَبَّعَ الكاملَ ثُلاثيَّ الحدودِ الناتجَ:

1 $x^2 + 12x$

$\frac{12}{2} = 6$ بإيجادِ $\frac{b}{2}$

$6^2 = 36$ بإيجادِ $\left(\frac{b}{2}\right)^2$

$x^2 + 12x + 36$ بإضافةِ $\left(\frac{b}{2}\right)^2$ إلى المقدارِ الأصليِّ

إذنْ، المقدارُ الناتجُ بعدَ إكمالِ المُرَبَّعِ هُوَ $x^2 + 12x + 36$، ويمكنُ تحليلُهُ كما يأتي:

$x^2 + 12x + 36 = (x + 6)^2$ بتحليلِ المُرَبَّعِ الكاملِ ثُلاثيِّ الحدودِ

2 $x^2 - 26x$

$\frac{-26}{2} = -13$ بإيجادِ $\frac{b}{2}$

$(-13)^2 = 169$ بإيجادِ $\left(\frac{b}{2}\right)^2$

$x^2 - 26x + 169$ بإضافةِ $\left(\frac{b}{2}\right)^2$ إلَى المقدارِ الأصليِّ

إذنْ، المقدارُ الناتجُ بعدَ إكمالِ المُرَبَّعِ هُوَ $x^2 - 26x + 169$، ويمكنُ تحليلُهُ كما يأتي:

$x^2 - 26x + 169 = (x - 13)^2$ بتحليلِ المُرَبَّعِ الكاملِ ثُلاثيِّ الحدودِ

أتحقَّقُ مِنْ فهمي

أجعلُ كلَّ مقدارٍ ممّا يأتي مُرَبَّعًا كاملًا، ثمَّ أحلّلُ المُرَبَّعَ الكاملَ ثُلاثيَّ الحدودِ الناتجَ:

a) $x^2 + 2x$

b) $x^2 - 14x$

حلُّ المُعادلاتِ التربيعيَّةِ علَى الصورةِ $x^2 + bx + c = 0$ بإكمالِ المُرَبَّعِ

يُمكِنُني استعمالُ إكمالِ المُرَبَّعِ لحلِّ أيِّ مُعادلةٍ تربيعيَّةٍ على الصورةِ $x^2 + bx + c = 0$، وذلكَ يتطلَّبُ فصلَ المقدارِ $x^2 + bx$ في الطرفِ الأيسرِ أوَّلًا، ثمَّ أُكمِلُ المُرَبَّعَ.

مثال 2

أَحُلُّ كُلًّا مِنَ المُعادلاتِ الآتيةِ بإكمالِ المُرَبَّعِ، مقرّبًا إجابتي لأقربِ جزءٍ مِنْ عشرةٍ (إنْ لَزِمَ):

1 $x^2 + 4x - 12 = 0$

$x^2 + 4x - 12 = 0$ المُعادلةُ المُعطاةُ

$x^2 + 4x = 12$ بجمعِ 12 إلى طرفَيِ المُعادلةِ

$x^2 + 4x + 4 = 12 + 4$ بإكمالِ المُرَبَّعِ بإضافةِ $\left(\frac{4}{2}\right)^2 = 4$ إلى طرفَيِ المُعادلةِ

$(x + 2)^2 = 16$ بتحليلِ المُرَبَّعِ الكاملِ ثُلاثيِّ الحدودِ

أُفَكِّرُ

هلْ يمكنُ حلُّ الفرعِ 1 مِنَ المثالِ بالتحليلِ؟ أبرّرُ إجابتي.

بأخذِ الجذرِ التربيعيِّ للطرفَيْنِ	$x + 2 = \pm 4$
بطرحِ 2 مِنْ طرفَيِ المُعادلةِ	$x = -2 \pm 4$
بفصلِ الحلَّيْنِ	$x = -2+4$ or $x = -2 -4$
بالتبسيطِ	$x = 2$ $x = -6$

إذنْ، جذرا المُعادلةِ $-6, 2$

التحقُّقُ: للتحقُّقِ، أعوّضُ قيمتَيْ x في المُعادلةِ الأصليّةِ.

2 $x^2 - 3x - 1 = 0$

المُعادلةُ المُعطاةُ	$x^2 - 3x - 1 = 0$
بجمعِ 1 إلى طرفَيِ المُعادلةِ	$x^2 - 3x = 1$
بإكمالِ المُربَّعِ بإضافةِ $\left(\frac{-3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$ إلى طرفَيِ المُعادلةِ	$x^2 - 3x + \frac{9}{4} = 1 + \frac{9}{4}$
بتحليلِ المُربَّعِ الكاملِ ثُلاثيِّ الحدودِ	$(x - \frac{3}{2})^2 = \frac{13}{4}$
بأخذِ الجذرِ التربيعيِّ للطرفَيْنِ	$x - \frac{3}{2} = \pm \frac{\sqrt{13}}{2}$
بجمعِ $\frac{3}{2}$ مِنْ طرفَيِ المُعادلةِ	$x = \frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{13}}{2}$
بفصلِ الحلَّيْنِ	$x = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{13}}{2}$ or $x = \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{13}}{2}$
باستعمالِ الآلةِ الحاسبةِ	$x \approx 3.3$ $x \approx -0.3$

إذنْ، جذرا المُعادلةِ التَّقريبيّانِ $-0.3, 3.3$

أُفكِّرُ

هلْ يمكنُ حلُّ الفرعِ 2 مِنَ المثالِ بالتحليلِ؟ أبرّرُ إجابتي.

أتحقَّقُ مِنْ فهمي

أحلُّ كُلًّا مِنَ المُعادلاتِ الآتيةِ بإكمالِ المُربَّعِ، مُقرِّبًا إجابتي لأقربِ جزءٍ مِنْ عشرةٍ (إنْ لَزِمَ):

a) $x^2 + 8x + 7 = 0$

b) $x^2 - 5x - 3 = 0$

حلُّ المُعادلاتِ التربيعيّةِ على الصورةِ $ax^2 + bx + c = 0$ بإكمالِ المُرَبَّعِ.

لحـلِّ المُعادلةِ التربيعيَّةِ على الصورةِ $ax^2 + bx + c = 0$؛ حيثُ $a \neq 1$، أقسِـمُ كلَّ حدٍّ في المُعادلــةِ على a، ثمَّ أفصِلُ الحدَّيْنِ اللذَيْنِ يحتويانِ على x^2 و x في الطرفِ الأيسـرِ أوَّلًا، ثمَّ أُكمِلُ المُرَبَّعَ.

مثال 3

أَحُلُّ كُلًّا مِنَ المُعادلاتِ الآتيةِ بإكمالِ المُرَبَّعِ:

1 $\mathbf{2x^2 - 12x + 8 = 0}$

$2x^2 - 12x + 8 = 0$ المُعادلةُ المُعطاةُ

$x^2 - 6x + 4 = 0$ بقسمةِ كلِّ حدٍّ على 2

$x^2 - 6x = -4$ بطرحِ 4 مِنْ طرفَي المُعادلةِ

$x^2 - 6x + 9 = -4 + 9$ بإكمالِ المُرَبَّعِ بإضافةِ $9 = \left(\frac{-6}{2}\right)^2$ إلى طرفَي المُعادلةِ

$(x-3)^2 = 5$ بتحليلِ المُرَبَّعِ الكاملِ ثُلاثيِّ الحدودِ

$x - 3 = \pm\sqrt{5}$ بأخذِ الجذرِ التربيعيِّ للطرفَيْنِ

$x = 3 \pm \sqrt{5}$ بجمعِ 3 إلى طرفَي المُعادلةِ

$x = 3 + \sqrt{5}$ or $x = 3 - \sqrt{5}$ بفصلِ الحلَّيْنِ

إذنْ، جذرا المُعادلةِ $3 + \sqrt{5}$, $3 - \sqrt{5}$

التحقُّقُ: للتحقُّقِ، أعوّضُ قيمتَيْ x في المُعادلةِ الأصليّةِ.

2 $\mathbf{3x^2 + 6x + 15 = 0}$

$3x^2 + 6x + 15 = 0$ المُعادلةُ المُعطاةُ

$x^2 + 2x + 5 = 0$ بقسمةِ كلِّ حدٍّ على 3

$x^2 + 2x = -5$ بطرحِ 5 مِنْ طرفَي المُعادلةِ

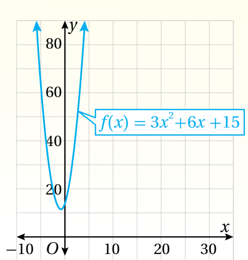
$x^2 + 2x + 1 = -5 + 1$ بإكمالِ المُرَبَّعِ بإضافةِ $1 = \left(\frac{2}{2}\right)^2$ إلى طرفَي المُعادلةِ

$(x + 1)^2 = -4$ بتحليلِ المُرَبَّعِ الكاملِ ثُلاثيِّ الحدودِ

بما أنَّهُ لا توجدُ أعدادٌ حقيقيَّةٌ مُرَبَّعاتُها سالبةٌ، فالمُعادلةُ ليسَ لها حُلولٌ حقيقيَّةٌ.

الدَّعمُ البيانيُّ

يظهرُ في الشكلِ الآتي مُنحنى الاقتـرانِ التربيعـيِّ المُرتبطِ بالمُعادلةِ $3x^2+6x+15=0$، الذي لا يقطـعُ المحورَ x؛ ما يعني عدمَ وجودِ حُلولٍ حقيقيَّةٍ للمُعادلةِ.



أتحقَّقُ مِنْ فهمي

أحلُّ كُلًّا مِنَ المُعادلاتِ الآتيةِ بإكمالِ المُرَبَّعِ:

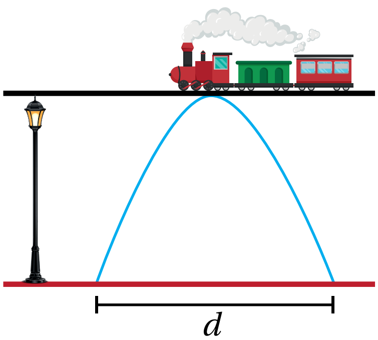
a) $2x^2 + 20x - 10 = 0$

b) $2x^2 + 8x + 12 = 0$

يمكنُ استعمالُ حلِّ المُعادلاتِ التربيعيَّةِ بطريقةِ إكمالِ المُرَبَّعِ في كثيرٍ مِنَ التطبيقاتِ الحياتيَّةِ.

مثال 4 : مِنَ الحياةِ

تصميمٌ: تَمُرُّ سِكَّةُ قطارٍ أعلى جسرٍ قَوْسِيٍّ، ويمثِّلُ الاقترانُ $h(x) = -x^2 + 10x - 18$ ارتفاعَ أيِّ نقطةٍ على الجسرِ عَنْ سطحِ الأرضِ بالمترِ، وَ x البُعدَ الأُفقيَّ للنقطةِ بالمترِ عَنْ عمودِ إنارةٍ بجانبِ الجسرِ، كما في الشكلِ المُجاورِ. أَجِدُ طولَ قاعدةِ القوسِ d، مقرِّبًا إجابتي لأقربِ جُزْءٍ مِنْ عشرَةٍ.



أفترِضُ أنَّ مُستوى سطحِ الأرضِ يمثِّلُ المحورَ x، إذَنْ تمثِّلُ كُلٌّ مِنْ نقطةِ بدايةِ القوسِ ونهايتِهِ حلًّا للمُعادلةِ المُرتبطةِ بالاقترانِ $h(x)$.

الخُطوةُ 1: أحلُّ المُعادلةَ المُرتبطةَ بالاقترانِ.

$-x^2 + 10x - 18 = 0$ المُعادلةُ المُرتبطةُ بالاقترانِ

$x^2 - 10x + 18 = 0$ بقسمةِ كلِّ حدٍّ على -1

$x^2 - 10x = -18$ بطرحِ 18 مِنْ طرفَيِ المُعادلةِ

$x^2 - 10x + 25 = -18 + 25$ بإكمالِ المُرَبَّعِ بإضافةِ $25 = \left(\frac{-10}{2}\right)^2$ إلى طرفَيِ المُعادلةِ

$(x - 5)^2 = 7$ بتحليلِ المُرَبَّعِ الكاملِ ثُلاثيِّ الحدودِ

$x - 5 = \pm\sqrt{7}$ بأخذِ الجذرِ التربيعيِّ للطرفَيْنِ

$x = 5 \pm \sqrt{7}$ بجمعِ 5 إلى طرفَيِ المُعادلةِ

$x = 5 + \sqrt{7}$ or $x = 5 - \sqrt{7}$ بفصلِ الحلَّيْنِ

$x \approx 7.6$ $\quad x \approx 2.4$ باستعمالِ الآلةِ الحاسبةِ

أتعلَّمُ

أُلاحِظُ أنَّهُ لا يمكنُ حلُّ المُعادلةِ المُرتبطةِ بالاقترانِ بالتحليلِ؛ لِذا أَحُلُّها بإكمالِ المُرَبَّعِ.

الخُطوةُ 2: أَجِدُ طولَ قاعدةِ القوسِ d.

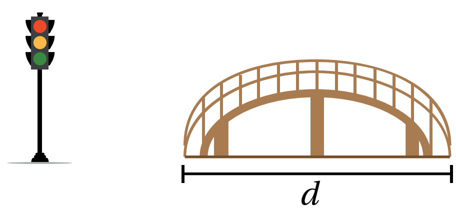
لإيجادِ طولِ قاعدةِ القوسِ d أطرحُ أحدَ الحلَّيْنِ مِنَ الآخَرِ.

$$d = 7.6 - 2.4 = 5.2$$

إذنْ، طولُ قاعدةِ القوسِ 5.2 m تقريبًا.

أتحقَّقُ مِنْ فهمي

تصميمٌ: صَمَّمَ مهندسٌ نموذجًا لجسرِ مُشاةٍ على شكلِ قطعٍ مُكافِئٍ، بحيثُ يمثّلُ الاقترانُ: $h(x) = -x^2 + 6x - 7$ ارتفاعَ الجسرِ عَنْ قاعدةِ النموذجِ بالديسيمترِ، وَ x البُعدَ الأُفقيَّ بالديسيمترِ عَنْ إشارةٍ ضوئيَّةٍ، كما في الشكلِ المُجاورِ. أَجِدُ طولَ قاعدةِ الجسرِ d، مُقرِّبًا إجابتي لأقربِ جُزءٍ مِنْ عشرةٍ.



أتدرَّبُ وأحُلُّ المسائلَ

أجعلُ كلَّ مقدارٍ ممّا يأتي مُرَبَّعًا كاملًا، ثمَّ أحلّلُ المُرَبَّعَ الكاملَ ثُلاثيَّ الحدودِ الناتجَ:

1. $x^2 + 4x$
2. $x^2 + 14x$
3. $x^2 - 3x$
4. $x^2 + 8x$
5. $x^2 - 2x$
6. $x^2 + 22x$

أَجِدُ قيمةَ c في كلٍّ ممّا يأتي، ثمَّ أَجِدُ المقدارَ الجبريَّ الذي يعبّرُ عَنِ النموذجِ:

7.

	x	2
x	x^2	$2x$
2	$2x$	c

8.

	x	8
x	x^2	$8x$
8	$8x$	c

9.

	x	10
x	x^2	$10x$
10	$10x$	c

أحلُّ كُلًّا مِنَ المُعادلاتِ الآتيةِ بإكمالِ المُرَبَّعِ:

10 $x^2 + 4x = 12$

11 $x^2 - 14x = -13$

12 $x^2 - 6x - 11 = 0$

13 $x^2 + 4x - 1 = 0$

14 $x^2 + 14x - 5 = 0$

15 $x^2 - 6x + 3 = 0$

16 $x^2 + 13x + 35 = 0$

17 $x^2 + 2x - 1 = 0$

18 $x^2 + 2x - 3 = 0$

أحلُّ كُلًّا مِنَ المُعادلاتِ الآتيةِ بإكمالِ المُرَبَّعِ، مقرّبًا إجابتي لأقربِ جُزءٍ مِنْ عشرَةٍ (إنْ لَزِمَ):

19 $x^2 + 2x - 9 = 0$

20 $x^2 - 4x - 7 = 0$

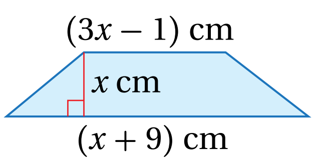
21 $x^2 + 2x - 5 = 0$

22 $2x^2 - 6x - 3 = 0$

23 $4x^2 - 8x + 1 = 0$

24 $2x^2 + 5x - 10 = 0$

25 **هندسةٌ:** يبيّنُ الشكلُ المُجاورُ شبهَ منحرفٍ مِساحتُهُ $20\ \text{cm}^2$. أَجِدُ قيمةَ x، مقرّبًا إجابتي لأقربِ جُزءٍ مِنْ عشرَةٍ.



إرشادٌ: مِساحةُ شبهِ المُنحرفِ تُساوي نصفَ مجموعِ طولَي الضِّلعَيْنِ المُتوازِيَيْنِ مضروبًا في الارتفاعِ.

26 **ضفادعُ:** وقفَ ضفدعٌ على جذعِ شجرةٍ يرتفعُ $1\ \text{m}$ عَنْ سطحِ الأرضِ، ثمَّ قفزَ إلى سطحِ الأرضِ ليُمثِّلَ الاقترانُ $h(t) = -5t^2 + 15t + 1$ ارتفاعَهُ بالمترِ عَنْ سطحِ الأرضِ بعدَ t ثانيةً مِنْ قفزِهِ عَنِ الجذعِ. بعدَ كَمْ ثانيةً يصلُ الضفدعُ إلى سطحِ الأرضِ؟ أقرّبُ إجابتي لأقربِ جُزءٍ مِنْ عشرَةٍ.

27 أحلُّ المسألةَ الواردةَ في بدايةِ الدرسِ.

مهاراتُ التفكيرِ العُليا

28 **تبريرٌ:** أَجِدُ جميعَ قِيَمِ الثابتِ b، التي تجعلُ المقدارَ $x^2 + bx + 25$ مُرَبَّعًا كاملًا، وأبرّرُ إجابتي.

29 **تبريرٌ:** هلْ يمكنُ حلُّ المُعادلةِ $x^2 + 10x = -20$ بطريقتَي التحليلِ وإكمالِ المُرَبَّعِ؟ أبرّرُ إجابتي.

30 **مسألةٌ مفتوحةٌ:** أكتبُ مُعادلةً تربيعيَّةً تُحَلُّ بطريقةِ إكمالِ المُرَبَّعِ لا بطريقةِ التحليلِ، ويكونُ جذراها عددَيْنِ حقيقيَّيْنِ موجبَيْنِ.

الدرس 4

حلُّ المُعادلاتِ التربيعيَّةِ باستعمالِ القانونِ العامِّ
Solving Quadratic Equations Using the Quadratic Formula

فكرةُ الدرسِ حلُّ المُعادلةِ التربيعيَّةِ باستعمالِ القانونِ العامِّ.

المصطلحاتُ القانونُ العامُّ، المُميِّزُ.

مسألةُ اليومِ فـي لعبـةِ رمـيِ القـرصِ، رمـى لاعـبُ القـرصَ فَمَثَّـلَ الاقتـرانُ $f(x) = -0.04x^2 + 0.84x + 2$ ارتفـاعَ القـرصِ بالمترِ عَنْ سـطحِ الأرضِ، حيث x المسافةَ الأُفقيَّةَ بالمترِ بينَ اللاعبِ والقرصِ. أَجِدُ المسافةَ الأُفقيَّةَ بينَ اللاعبِ والقرصِ عندما يصلُ القرصُ إلى سطحِ الأرضِ.

القانونُ العامُّ

تعلَّمتُ في الدرسِ السـابقِ حلَّ المُعادلاتِ التربيعيَّةِ باسـتعمالِ طريقةِ إكمالِ المُربَّعِ، ويمكنُ بهذهِ الطريقةِ اشتقاقُ قانونٍ يُستعمَلُ لحلِّ أيِّ مُعادلةٍ تربيعيَّةٍ مكتوبةٍ على الصورةِ القياسيَّةِ $ax^2 + bx + c = 0$، كما سَأُلاحِظُ عندَ تنفيذِ النشاطِ المفاهيميِّ الآتي:

نشاطٌ مفاهيميٌّ حلُّ المُعادلةِ التربيعيَّةِ بإكمالِ المُربَّعِ

توضّحُ الخُطواتُ الآتيةُ طريقةَ حلِّ أيِّ مُعادلةٍ تربيعيَّةٍ على الصورةِ $ax^2 + bx + c = 0$؛ حيثُ $a \neq 0$. باستعمالِ طريقةِ إكمالِ المُربَّعِ، أصفُ الإجراءَ الذي تَمَّ في كلِّ خُطوةٍ:

1. $ax^2 + bx + c = 0$
2. $ax^2 + bx = -c$
3. $x^2 + \frac{b}{a}x = \frac{-c}{a}$
4. $x^2 + \frac{b}{a}x + (\frac{b}{2a})^2 = \frac{-c}{a} + (\frac{b}{2a})^2$
5. $(x + \frac{b}{2a})^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}$
6. $(x + \frac{b}{2a})^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{4ac}{4a^2}$
7. $x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$
8. $x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$
9. $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

تُسَمّى الصيغةُ التي جرى التوصُّلُ إليها في السطرِ الأخيرِ مِنَ النشاطِ السابقِ **القانونَ العامَّ** (quadratic formula).

مفهومٌ أساسيٌّ — حلُّ المُعادلةِ التربيعيَّةِ بالقانونِ العامِّ

يمكنُ إيجادُ الحلّينِ الحقيقيَّينِ للمعادلةِ التربيعيةِ $ax^2 + bx + c = 0$ بالقانونِ العامِّ على النَّحوِ الآتي:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

حيثُ $a \neq 0$ و $b^2 - 4ac \geq 0$.

مثال 1

أَحُلُّ كُلًّا مِنَ المُعادلاتِ الآتيةِ بالقانونِ العامِّ، مقرّبًا إجابتي لأقربِ جُزءٍ مِنْ عشرَةٍ (إنْ لَزِمَ):

1 $\mathbf{2x^2 - 3x = 5}$

الخُطوةُ 1: أكتبُ المُعادلةَ بالصورةِ القياسيَّةِ.

$2x^2 - 3x = 5$ المُعادلةُ المُعطاةُ

$2x^2 - 3x - 5 = 0$ بطرحِ 5 مِنْ طرفَيِ المُعادلةِ

الخُطوةُ 2: أطبّقُ القانونَ العامَّ.

$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ صيغةُ القانونِ العامِّ

$= \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4(2)(-5)}}{2(2)}$ بتعويضِ $a = 2, b = -3, c = -5$

$= \frac{3 \pm \sqrt{9 + 40}}{4}$ بالتبسيطِ

$= \frac{3 \pm \sqrt{49}}{4} = \frac{3 \pm 7}{4}$ بالجمعِ، ثمَّ إيجادِ الجذرِ التربيعيِّ

أتعلَّمُ

بما أنَّهُ يمكنُ إيجادُ الجذرِ التربيعيِّ للعددِ 49، فلا حاجةَ إلى استعمالِ الآلةِ الحاسبةِ؛ لِذا تكونُ قيمةُ الجذرِ دقيقةً وليستْ تقريبيَّةً.

بفصلِ الحلَّيْنِ $x = \frac{3-7}{4}$ or $x = \frac{3+7}{4}$

بالتبسيطِ $x = -1$ $x = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$

إذنْ، جذرا المُعادلةِ هُما $-1, \frac{5}{2}$

2 $5x^2 - 11x = 4$

الخُطوةُ 1: أكتبُ المُعادلةَ بالصورةِ القياسيَّةِ.

المُعادلةُ المُعطاةُ $5x^2 - 11x = 4$

بطرحِ 4 مِنْ طرفَيِ المُعادلةِ $5x^2 - 11x - 4 = 0$

الخُطوةُ 2: أطبّقُ القانونَ العامَّ.

صيغةُ القانونِ العامِّ $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

بتعويضِ $a = 5, b = -11, c = -4$ $= \frac{-(-11) \pm \sqrt{(-11)^2 - 4(5)(-4)}}{2(5)}$

بالتبسيطِ $= \frac{11 \pm \sqrt{121 + 80}}{10}$

بالجمعِ $= \frac{11 \pm \sqrt{201}}{10}$

بفصلِ الحلَّيْنِ $x = \frac{11 - \sqrt{201}}{10}$ or $x = \frac{11 + \sqrt{201}}{10}$

باستعمالِ الآلةِ الحاسبةِ $x \approx -0.3$ $x \approx 2.5$

إذنْ، جذرا المُعادلةِ التقريبيّانِ $-0.3, 2.5$

أتعلَّمُ

بما أنَّ $\sqrt{201}$ عددٌ غيرُ نسبيٍّ؛ لِذا أستعملُ الآلةَ الحاسبةَ لإيجادِ قيمةٍ تقريبيَّةٍ للحلِّ، أمّا القيمةُ الدقيقةُ للحلِّ فتكونُ بالابقاءِ على الجذرِ كما هُوَ.

أتحقَّقُ مِنْ فهمي

أحلُّ كُلًّا مِنَ المُعادلاتِ الآتيةِ بالقانونِ العامِّ، مُقرِّبًا إجابتي لأقربِ جُزءٍ مِنْ عشرةٍ (إنْ لَزِمَ):

a) $3x^2 + 16x = -5$

b) $x^2 - 2x = 4$

المُمَيِّزُ

تعلَّمتُ سابقًا أنَّ للمُعادلةِ التربيعيَّةِ حلَّيْنِ حقيقيَّيْنِ مختلفَيْنِ، أوْ حلًّا حقيقيًّا واحدًا، أوْ لا توجدُ لها حُلولٌ حيقيقيَّةٌ، ويمكنُ تحديدُ عددِ الحُلولِ الحقيقيَّةِ للمُعادلةِ التربيعيَّةِ قبلَ حلِّها باستعمالِ **المُمَيِّزِ** (discriminant)، وَهُوَ المقدارُ التربيعيُّ الذي يقعُ أسفلَ الجذرِ التربيعيِّ في القانونِ العامِّ $(b^2 - 4ac)$، وَيُرمَزُ إليهِ بالرَّمزِ Δ.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

المُميِّزُ

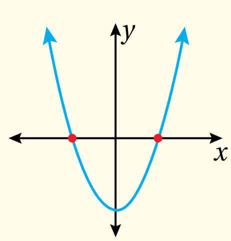
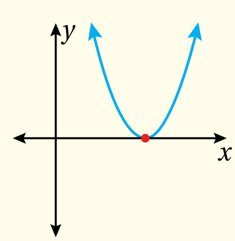
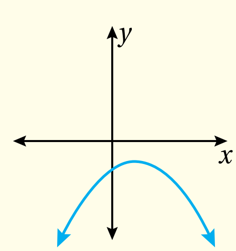
رُموزٌ رياضيَّةٌ

الرَّمزُ Δ إغريقيٌّ، وَيُقْرَأُ دلتا.

مفهومٌ أساسيٌّ

استعمالُ المُمَيِّزِ

مُمَيِّزُ المُعادلةِ التربيعيَّةِ $ax^2 + bx + c = 0$ هُوَ $\Delta = b^2 - 4ac$، ويمكنُ استعمالُهُ لتحديدِ عددِ حلولِ المُعادلةِ التربيعيَّةِ كما يأتي:

إشارةُ المُمَيِّزِ Δ	$\Delta > 0$ موجبٌ	$\Delta = 0$ صفرٌ	$\Delta < 0$ سالبٌ
عددُ الحُلولِ	حلّانِ حقيقيّانِ مختلفانِ	حلٌّ حقيقيٌّ واحدٌ	لا توجدُ حُلولٌ حقيقيَّةٌ
مثالٌ بيانيٌّ			

مثال 2

أحدّدُ عددَ الحُلولِ الحقيقيَّةِ لكلِّ مُعادلةٍ تربيعيَّةٍ ممّا يأتي باستعمالِ المُمَيِّزِ:

1 $x^2 - 4x + 3 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac$ صيغةُ المُمَيِّزِ

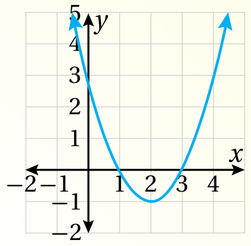
$= (-4)^2 - 4(1)(3)$ بتعويضِ $a = 1, b = -4, c = 3$

$= 4$ بالتبسيطِ

بما أنَّ $\Delta > 0$، إذنْ للمُعادلةِ حلّانِ حقيقيّانِ مختلفانِ.

الدَّعمُ البيانِيُّ:

يُظهِرُ التمثيلُ البيانِيُّ الآتي لمُنحنى الاقترانِ التربيعيِّ المُرتبطِ بالمُعادلةِ $x^2 - 4x + 3 = 0$ وجودَ حلَّيْنِ حقيقيَّيْنِ مختلفَيْنِ لها.



2 $x^2 - 2x + 1 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac$ صيغةُ المُمَيِّزِ

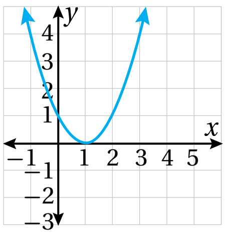
$= (-2)^2 - 4(1)(1)$ بتعويضِ $a = 1, b = -2, c = 1$

$= 0$ بالتبسيطِ

بما أنَّ $\Delta = 0$، إذنْ للمُعادلةِ حلٌّ حقيقيٌّ واحدٌ.

الدَّعمُ البيانيُّ:

يُظهِرُ التمثيلُ البيانيُّ المُجاورُ لمنحنى الاقترانِ التربيعيِّ المُرتبطِ بالمُعادلةِ $x^2 - 2x + 1 = 0$ وجودَ حلٍّ حقيقيٍّ واحدٍ.



3 $x^2 - x + 1 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac$ صيغةُ المُمَيِّزِ

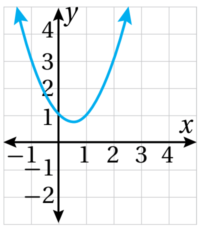
$= (-1)^2 - 4(1)(1)$ بتعويضِ $a = 1, b = -1, c = 1$

$= -3$ بالتبسيطِ

بما أنَّ $0 > \Delta$، إذنْ ليسَ للمُعادلةِ أيُّ حلٍّ حقيقيٍّ.

الدَّعمُ البيانيُّ:

يُظهِرُ التمثيلُ البيانيُّ المُجاورُ لمنحنى الاقترانِ التربيعيِّ المُرتبطِ بالمُعادلةِ $x^2 - x + 1 = 0$ عدمَ وجودِ أيِّ حلٍّ حقيقيٍّ للمُعادلةِ.



أتحقَّقُ مِنْ فهمي

أحدّدُ عددَ الحُلولِ الحقيقيّةِ لكلِّ مُعادلةٍ تربيعيّةٍ ممّا يأتي باستعمالِ المُمَيِّزِ:

a) $-x^2 + 4x - 4 = 0$

b) $2x^2 + 8x - 3 = 0$

c) $x^2 - 6x + 11 = 0$

اختيارُ الطريقةِ الأنسبِ لحلِّ المُعادلةِ التربيعيَّةِ

تعلَّمتُ خمسَ طرائقَ لحلِّ المُعادلاتِ التربيعيَّةِ، وفي بعضِ الأحيانِ يكونُ استعمالُ إحدى هذهِ الطرائقِ أنسبَ مِنِ استعمالِ الطرائقِ الأُخرى، ويبيّنُ الجدولُ الآتي ملخَّصًا لهذِهِ الطرائقِ وإيجابياتِ كلٍّ منها وسلبياتِها.

ملخَّصُ المفهومِ

طرائقُ حلِّ المُعادلاتِ التربيعيَّةِ

الطريقةُ	الإيجابياتُ	السلبياتُ
التمثيلُ البيانيُّ	• يمكنُ استعمالُها لحلِّ أيِّ مُعادلةٍ تربيعيَّةٍ. • يمكنُ بسهولةٍ تحديدُ الحُلولِ مِنَ التمثيلِ.	• قد لا تُعطي حلولًا دقيقةً.
التحليلُ إلى العواملِ	• مِنْ أفضلِ الطرائقِ لتجربَتِها أوَّلًا. • تُعطي إجابةً مباشرةً إذا كانَتِ المُعادلةُ قابلةً للتحليلِ أو كانَ الحدُّ الثابتُ صِفرًا.	• ليستْ جميعُ المُعادلاتِ التربيعيَّةِ قابلةً للتحليلِ.
استعمالُ الجُذورِ التربيعيَّةِ	• تُستعمَلُ لحلِّ المُعادلاتِ على الصورةِ $(x + a)^2 = c$، حيث $c \geq 0$	• لا تُستعمَلُ إذا كانَ الحدُّ bx موجودًا.
إكمالُ المُرَبَّعِ	• يمكنُ استعمالُها لحلِّ أيِّ مُعادلةٍ تربيعيَّةٍ على الصورةِ $ax^2 + bx + c = 0$. • مِنَ الأسهلِ استعمالُها إذا كانَ $a = 1$، وَb عددًا زوجيًّا.	• في بعضِ الأحيانِ تكونُ الحساباتُ مُعَقَّدَةً.
القانونُ العامُّ	• يمكنُ استعمالُها لحلِّ أيِّ مُعادلةٍ تربيعيَّةٍ على الصورةِ $ax^2 + bx + c = 0$. • تُعطي حُلولًا دقيقةً.	• قد تستغرقُ وقتًا أطولَ مِنْ باقي الطرائقِ لإجراءِ الحساباتِ.

مثال 3

أَحُلُّ كلَّ مُعادلةٍ ممّا يأتي باستعمالِ أيِّ طريقةٍ، وأبرّرُ سببَ اختيارِ الطريقةِ:

1 $x^2 + 5x - 14 = 0$

يمكنُ تحليلُ الطرفِ الأيسرِ مِنَ المُعادلةِ بسهولةٍ؛ لِذا أَحُلُّها باستعمالِ التحليلِ إلى العواملِ.

$x^2 + 5x - 14 = 0$	المُعادلةُ المُعطاةُ
$(x+7)(x-2) = 0$	بالتحليلِ إلى العواملِ
$x + 7 = 0 \quad \text{or} \quad x - 2 = 0$	خاصيَّةُ الضّربِ الصِّفريِّ
$x = -7 \qquad x = 2$	بحلِّ كلِّ مُعادلةٍ

إذنْ، جذرا المُعادلةِ هُما $-7, 2$

2 $x^2 - 8x - 3 = 0$

بما أنَّ معاملَ x^2 يُساوي 1، ومعاملَ x عددٌ زوجيٌّ، فَمِنَ الأفضلِ استعمالُ طريقةِ إكمالِ المُرَبَّعِ.

$x^2 - 8x - 3 = 0$	المُعادلةُ المُعطاةُ
$x^2 - 8x = 3$	بجمعِ 3 إلى طرفَي المُعادلةِ
$x^2 - 8x + 16 = 3 + 16$	بإكمالِ المُرَبَّعِ بإضافةِ $\left(\frac{-8}{2}\right)^2 = 16$ إلى طرفَي المُعادلةِ
$(x-4)^2 = 19$	بتحليلِ المُرَبَّعِ الكاملِ ثُلاثيِّ الحدودِ
$x - 4 = \pm\sqrt{19}$	بأخذِ الجذرِ التربيعيِّ للطرفَيْنِ
$x = 4 \pm \sqrt{19}$	بجمعِ 4 إلى طرفَي المُعادلةِ
$x = 4 + \sqrt{19} \quad \text{or} \quad x = 4 - \sqrt{19}$	بفصلِ الحلَّيْنِ

إذنْ، جذرا المُعادلةِ $4 + \sqrt{19}, 4 - \sqrt{19}$

أتذكَّرُ

أجرّبُ أوّلًا طريقةَ التحليلِ إلى العواملِ قبلَ باقي الطرائقِ.

أُفكِّرُ

هلْ يمكنُ حلُّ المُعادلةِ بالتحليلِ؟ أبرّرُ إجابتي.

3 $2x^2 - 15x = -19$

بما أنَّهُ لا يمكنُ تحليلُ المُعادلةِ والأعدادُ فيها كبيرةٌ، فأستعمِلُ القانونَ العامَّ.

الخُطوةُ 1: أكتبُ المُعادلةَ بالصورةِ القياسيَّةِ.

$2x^2 - 15x = -19$	المُعادلةُ المُعطاةُ
$2x^2 - 15x + 19 = 0$	بجمعِ 19 إلى طرفَيِ المُعادلةِ

الخُطوةُ 2: أستعملُ المُمَيِّزَ لتحديدِ عددِ الحُلولِ الحقيقيَّةِ للمُعادلةِ.

$\Delta = b^2 - 4ac$	صيغةُ المُمَيِّزِ
$= (-15)^2 - 4(2)(19)$	بتعويضِ $a = 2, b = -15, c = 19$
$=73$	بالتبسيطِ

بما أنَّ $\Delta > 0$، إذنْ للمُعادلةِ حلّانِ حقيقيّانِ مختلفانِ.

الخُطوةُ 3: أطبِّقُ القانونَ العامَّ.

$x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$	صيغةُ القانونِ العامِّ
$x = \dfrac{-(-15) \pm \sqrt{73}}{2(2)}$	بتعويضِ $a = 2, b = -15, \Delta = 73$
$= \dfrac{15 \pm \sqrt{73}}{4}$	بالتبسيطِ
$x = \dfrac{15 - \sqrt{73}}{4}$ or $x = \dfrac{15 + \sqrt{73}}{4}$	بفصلِ الحلَّيْنِ

إذنْ، جذرا المُعادلةِ $\dfrac{15 + \sqrt{73}}{4}$, $\dfrac{15 - \sqrt{73}}{4}$

أتعلَّمُ

يُفَضَّلُ تحديدُ عددِ الحُلولِ الحقيقيَّةِ للمُعادلةِ قبلَ البَدءِ بحلِّها باستعمالِ القانونِ العامِّ.

أتحقَّقُ مِنْ فهمي

أحلُّ كلَّ مُعادلةٍ ممّا يأتي باستعمالِ أيِّ طريقةٍ، وأبرِّرُ سببَ اختيارِ الطريقةِ:

a) $x^2 + 3x - 28 = 0$ **b)** $-x^2 - 10x = 11$ **c)** $3x^2 - 13x = 5$

يُستعمَلُ القانونُ العامُّ كثيرًا في حلِّ المُعادلاتِ التربيعيَّةِ التي تُنَمذِجُ تطبيقاتٍ حياتيَّةً أوْ علميَّةً؛ لأنَّ قِيَمَ المعاملاتِ في تلكَ المُعادلاتِ قد لا تكونُ بسيطةً؛ ما يجعلُها غيرَ قابلةٍ للتحليلِ.

مثال 4 : مِنَ الحياةِ

حرائقُ الغاباتِ: أُطلِقَتْ قذيفةٌ لإطفاءِ حريقٍ شَبَّ في إحدى الغاباتِ، فَمَثَّلَ الاقترانُ $h(x) = -0.001x^2 + 0.5x + 4$ ارتفاعَها بالمترِ عَنْ سطحِ الأرضِ؛ حيثُ x المسافةُ الأُفقيَّةُ بينَ القذيفةِ والمدفعِ. أَجِدُ المسافةَ الأُفقيَّةَ بينَ موقعِ سقوطِ القذيفةِ والمدفعِ.

إذا افترضنا أنَّ سطحَ الأرضِ يمثِّلُ المحورَ x، فإنَّ أحدَ جذرَيِ المُعادلةِ $-0.001x^2 + 0.5x + 4 = 0$ يمثِّلُ موقعَ سقوطِ القذيفةِ.

أستعملُ القانونَ العامَّ لحلِّ المُعادلةِ:

$$-0.001x^2 + 0.5x + 4 = 0$$ المُعادلةُ المُرتبطةُ بالاقترانِ

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$ صيغةُ القانونِ العامِّ

$$x = \frac{-(0.5) \pm \sqrt{(0.5)^2 - 4(-0.001)(4)}}{2(-0.001)}$$ بتعويضِ $a = -0.001$, $b = 0.5$, $c = 4$

$$x = \frac{-0.5 \pm \sqrt{0.266}}{-0.002}$$ بالتبسيطِ

$$x = \frac{-0.5 + \sqrt{0.266}}{-0.002} \quad \text{or} \quad x = \frac{-0.5 - \sqrt{0.266}}{-0.002}$$ بفصلِ الحلَّيْنِ

$$x \approx -7.9 \qquad x \approx 507.9$$ باستعمالِ الآلةِ الحاسبةِ

بما أنَّ موقعَ سقوطِ القذيفةِ يكونُ أمامَ المدفعِ وليسَ خلفَهُ، فأستثني القيمةَ السالبةَ. إذنْ، يَبْعُدُ موقعُ سقوطِ القذيفةِ عَنِ المدفعِ 507.9 m تقريبًا.

معلومةٌ

استطاعَ العلماءُ مؤخَّرًا تطويرَ قنابلَ تحتوي على موادَّ تُطفِئُ الحرائقَ، تُطلَقُ باستخدامِ مدافعَ مِنْ مسافةٍ تصلُ إلى 5 km نحوَ مناطقِ الاشتعالِ التي يصعبُ الوصولُ إليها، مثلِ الغاباتِ.

أتحقَّقُ مِنْ فهمي

في مناورةٍ تدريبيَّةٍ للقُوّاتِ المسلَّحةِ الأردنيَّةِ – الجيشِ العربيِّ، أُطلِقَتْ قذيفةٌ مِنَ ارتفاعِ 2 m، فَمَثَّلَ الاقترانُ $h(x) = -0.001x^2 + 0.9x + 2$ ارتفاعَها بالمترِ عَنْ سطحِ الأرضِ؛ حيثُ x المسافةُ الأُفقيَّةُ بينَ القذيفةِ وموقعِ إطلاقِها. أَجِدُ المسافةَ الأُفقيَّةَ بينَ موقعِ إطلاقِ القذيفةِ وموقعِ سقوطِها.

أتدرَّبُ وأحُلُّ المسائلَ

أحلُّ كُلًّا مِنَ المُعادلاتِ الآتيةِ بالقانونِ العامِّ، مقرّبًا إجابتي لأقربِ جُزءٍ مِنْ عشرَةٍ (إنْ لَزِمَ):

1) $2x^2 + x - 8 = 0$

2) $3x^2 + 5x + 1 = 0$

3) $x^2 - x - 10 = 0$

4) $4x^2 + 3 = -9x$

5) $6x^2 + 22x + 19 = 0$

6) $x^2 + 3x = 6$

7) $3x^2 + 1 = 7x$

8) $2x^2 + 11x + 4 = 0$

9) $4x^2 + 5x = 3$

10) $4x^2 = 9x - 4$

11) $7x^2 = 2 - 3x$

12) $5x^2 - 10x + 1 = 0$

أحدّدُ عددَ الحُلولِ الحقيقيّةِ لكلِّ مُعادلةٍ تربيعيّةٍ ممّا يأتي باستعمالِ المُميِّزِ:

13) $x^2 - 6x + 10 = 0$

14) $2x^2 - 12x = -18$

15) $-5x^2 + 8x + 9 = 0$

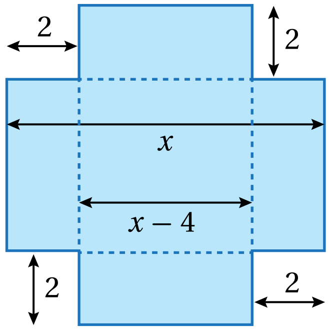
أحلُّ كلَّ مُعادلةٍ ممّا يأتي باستعمالِ أيِّ طريقةٍ، وأبرّرُ سببَ اختيارِ الطريقةِ:

16) $x^2 + 4x = 15$

17) $9x^2 - 49 = 0$

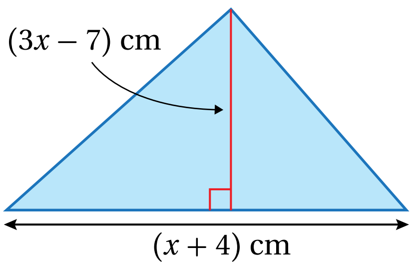
18) $x^2 + 4x - 60 = 0$

19) **صناعــةٌ:** تجري صناعةُ صنــدوقٍ معدنيٍّ مِنْ صفيحةٍ مُرَبَّعَةِ الشَّــكلِ بقطعِ 4 مُرَبَّعاتٍ متطابقةٍ مِنْ زوايا الصَّفيحةِ، طولُ ضلعِ كلِّ مُرَبَّعٍ منها 2 m، ثمَّ تُطوى الجوانبُ لتشكيلِ الصُّندوقِ. إذا كانَ حجمُ الصُّندوقِ $144\ m^3$، فَأَجِــدُ أبعادَ الصفيحةِ الأصليَّةِ التــي صُنِعَ منها الصّندوقُ، مقرّبًا إجابتي لأقربِ جُزءٍ مِنْ عشرَةٍ.



20 **حديقةٌ:** حديقةٌ مستطيلةُ الشــكلِ يزيدُ طولُها على عرضِها بمقدارِ 5 m. إذا كانَتْ مِساحتُها $60\ m^2$، فَأَجِدْ أبعادَها، مقرّبًا إجابتي لأقربِ جُزءٍ مِنْ مِئَةٍ.

21 **هندسةٌ:** يبيّنُ الشكلُ المجاور مثلّثًا مِساحتُهُ $10\ cm^2$. أَجِدُ قيمةَ x، مقرّبًا إجابتي لأقربِ جُزءٍ مِنْ عشرَةٍ.



22 أحلُّ المسألةَ الواردةَ في بدايةِ الدرسِ.

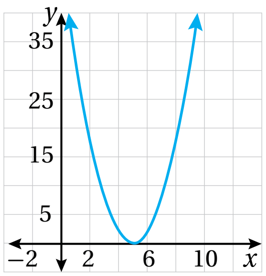
مهاراتُ التفكيرِ العُليا

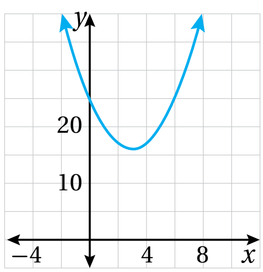
تبريرٌ: أصلُ كلَّ مُعادلةٍ في ما يأتي بالتمثيلِ البيانيِّ للاقترانِ المُرتبطِ بها، وأبرّرُ إجابتي:

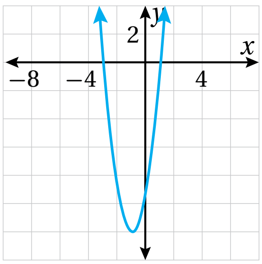
25 $3x^2 + 6x - 9 = 0$

24 $2x^2 - 20x + 50 = 0$

23 $x^2 - 6x + 25 = 0$





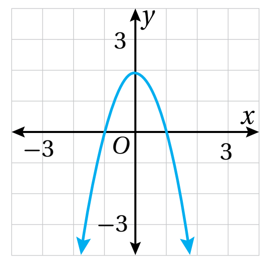


26 **تَحَدٍّ:** حَلَّتْ رنيمُ مُعادلةً تربيعيَّةً باستعمالِ القانونِ العامِّ فكانَتْ إجابتُها $x = \frac{3 \pm \sqrt{37}}{2}$. أَجِدُ المُعادلةَ التربيعيَّةَ التي حلَّتها رنيمُ.

27 **أكتشِفُ الخطأَ:** يقولُ نورٌ إنَّ مُمَيِّزَ المُعادلةِ $2x^2 + 5x - 1 = 0$ هُوَ 17. أكتشِفُ الخطأَ الذي وقعَ فيهِ نورٌ وأصحّحُهُ.

أختارُ رمزَ الإجابةِ الصحيحةِ لكلٍّ ممّا يأتي:

1 أيٌّ ممّـا يأتي يمثّـلُ أحدَ حُلولِ المُعادلـةِ التربيعيَّةِ في الشكلِ المُجاورِ؟



a) 1 b) 2

c) 0 d) 3

2 جذرا المُعادلةِ $3x^2 - 48 = 0$، هُما:

a) $-2, 2$ b) $-4, 4$

c) $-16, 16$ d) $6, -6$

3 جذرا المُعادلةِ $x^2 - 17x + 42 = 0$، هُما:

a) $1, 42$ b) $2, 21$

c) $3, 14$ d) $6, 7$

4 جذرا المُعادلةِ $2x^2 - x - 3 = 0$، هُما:

a) $-\frac{2}{3}, 1$ b) $\frac{2}{3}, -1$

c) $-\frac{3}{2}, 1$ d) $\frac{3}{2}, -1$

5 قيمةُ k التي تجعلُ $0, -2$ حلَّينِ للمعادلةِ $3x^2 = kx$ هيَ:

a) 2 b) -2

c) -6 d) 6

أحلُّ كُلًّا مِنَ المُعادلاتِ الآتيةِ بيانيًّا:

6 $-x^2 + 7x - 12 = 0$

7 $x^2 - 8x + 16 = 0$

8 $-x^2 - 6x = 9$

9 $3x^2 - 27 = 0$

10 $x^2 + 6x = -8$

أحلُّ كُلًّا مِنَ المُعادلاتِ الآتيةِ:

11 $x^2 - 3x - 10 = 0$

12 $x^2 - 8x + 15 = 0$

13 $m^2 + 10m + 25 = 0$

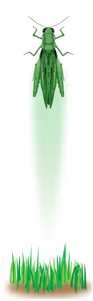
14 $25t^2 - 49 = 0$

15 $12x^2 - 16x - 35 = 0$

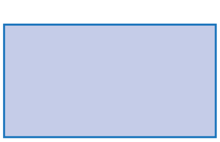
16 $10x^2 - x = 2$

17 $25x^2 = 10 - 45x$

18 يمثّلُ الاقترانُ $h(t) = -16t^2 + 8t$ ارتفاعَ جُندُبٍ بالقدمِ بعدَ t ثانيةً مِنْ قفزِه. بعدَ كمْ ثانيةً يصلُ إلى ارتفاعِ 1 ft عَنْ سطحِ الأرضِ؟



19 يبيّنُ الشكلُ الآتي مستطيلًا مِساحتُهُ $91\ m^2$. أَجِدُ أبعادَهُ.



أحلُّ كلًا مِنَ المعادلاتِ الآتيةِ:

20 $2x^2 + 13x + 20 = 0$

21 $7y^2 + 16y - 15 = 0$

22 $2t^2 - t = 3$

23 $8y^2 = 10y - 2$

24 $2q^2 - 12q - 22 = 0$

25 $w^2 + w = \frac{3}{4}$

26 يمثّلُ الاقترانُ $h(t) = -5t^2 + 30t$ ارتفاعَ صاروخِ ألعابٍ ناريّةٍ بالأمتارِ بعدَ t ثانيةً مِنْ إطلاقِهِ. بعدَ كمْ ثانيةً مِنْ إطلاقِهِ يصلُ الصاروخُ إلى الأرضِ؟

أحلُّ كُلًّا مِنَ المُعادلاتِ الآتيةِ بإكمالِ المُربَّعِ، تاركًا الإجابةَ بدلالةِ الجذرِ التربيعيِّ:

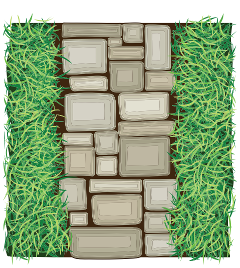
27 $x^2 + 6x + 7 = 0$

28 $x^2 - 3x - 1 = 0$

29 $x^2 - 9x + 10 = 0$

30 $x^2 - 2x - 7 = 0$

31 **فِناءٌ:** فِناءُ منزلٍ على شكلِ مُستطيلٍ يزيدُ طولُهُ على عرضِهِ بمقدارِ 6 m، ومساحتُهُ $216\ m^2$. أَجِدُ أبعادَهُ، باستعمالِ إكمالِ المُربَّعِ.



أحلُّ كُلًّا مِنَ المُعادلاتِ الآتيةَ بإكمالِ المُربَّعِ، مقرّبًا إجابتي لأقربِ جُزءٍ مِنْ عشرةٍ (إنْ لَزِمَ):

32 $x^2 - 10x = 24$

33 $x^2 + x - 1 = 0$

34 $2x^2 + 20x - 10 = 0$

35 $3x^2 - 6x - 9 = 0$

أحلُّ كُلًّا مِنَ المُعادلاتِ الآتيةَ بالقانونِ العامِّ، مقرّبًا إجابتي لأقربِ جُزءٍ مِنْ عشرةٍ (إنْ لَزِمَ):

36 $5x^2 + 2x - 1 = 0$

37 $7x^2 + 12x = -2$

38 $3x^2 + 11x = -9$

أحلُّ كلَّ مُعادلةٍ ممّا يأتي باستعمالِ أيِّ طريقةٍ، وأبرّرُ سببَ اختيارِ الطريقةِ:

39 $2x^2 + 7x = 0$

40 $4x^2 + 8x - 5 = 0$

41 $x^2 - 2x = 5$

أحلُّ كُلًّا مِنَ المُعادلاتِ الآتيةِ:

42 $6x^2 = 8x$

43 $d^2 - 3d = 10$

44 $x^2 - 4x + 1 = 0$

45 $4y^2 - 2y + \frac{1}{4} = 0$

تدريبٌ على الاختباراتِ الدّوليّةِ

46 أيُّ قِيَمِ c الآتيةِ تجعلُ المُعادلةَ $5x^2 + c = 10$ دونَ حلٍّ؟

a) 12　b) 5　c) 9　d) 1

47 جذرا المعادلةِ $y^2 - 6y - 16 = 0$، هما:

a) 2, 8　b) −2, −8
c) 2, −8　d) −2, 8

48 أيٌّ ممّا يأتي يجعلُ المقدارَ $x^2 + 14x$ عندَ إضافتِهِ مُربَّعًا كاملًا؟

a) 7　b) 49　c) 14　d) 196

49 عددُ الحُلولِ الحقيقيّةِ للمُعادلةِ $x^2 + 7x = -11$، هُوَ:

a) 0　b) 1　c) 2　d) 3

الوحدةُ
4

الهندسةُ الإحداثيَّةُ
Coordinate Geometry

ما أهميَّةُ هذهِ الوحدةِ؟

الهندسةُ الإحداثيَّةُ عمادُ نظامِ تحديدِ المواقعِ العالميِّ (GPS)، وهيَ تُستخدَمُ في كثيرٍ مِنَ التطبيقاتِ العلميَّةِ والحياتيَّةِ المهمَّةِ، مثلِ أجهزةِ الرادارِ التي ترصدُ حركةَ السُّفُنِ والطائراتِ وتنظِّمُها، كما تُستخدَمُ في تخطيطِ الطرقِ والحدائقِ.

تعلَّمتُ سابقًا:

- ✓ إيجادَ ميلِ خطٍّ مستقيمٍ ومعادلتِهِ.
- ✓ حلَّ نظامٍ مِنْ معادلتَينِ خطِّيَّتَينِ.

سأتعلَّمُ في هذهِ الوحدةِ:

- ◄ إيجادَ المسافةِ بينَ نقطتَيْنِ في المُستوى الإحداثيِّ.
- ◄ إيجادَ نقطةِ مُنتصفِ قطعةٍ مُستقيمةٍ في المُستوى الإحداثيِّ.
- ◄ إيجادَ البعدِ بينَ نقطةٍ ومستقيمٍ.

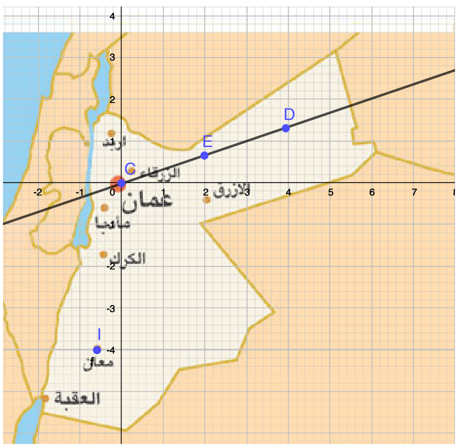
مشروعُ الوحدةِ

الهندسةُ الإحداثيَّةُ والخريطةُ

فكرةُ المشروعِ إيجادُ المسافةِ بينَ مدينتَيْنِ على الخريطةِ باستعمالِ برمجيَّةِ جيوجبرا.

الموادُّ والأدواتُ شبكةُ الإنترنت، برمجيَّةُ جيوجبرا.

خطواتُ تنفيذِ المشروعِ:



1 أبحثُ مَعَ أفرادِ مجموعتي في شبكةِ الإنترنت عَنْ خريطةِ المملكةِ الأردنيَّةِ الهاشميَّةِ، ثمَّ أحفظُها في جهازِ الحاسوبِ.

2 أنقُرُ على أيقونةِ Image مِنْ شريطِ الأدواتِ، ثمَّ أختارُ الصورةَ التي حفظتُها.

3 أعدِّلُ موقعَ الصورةِ، وأختارُ مقاسًا مناسبًا لها بِتَحريكِ النقطتَيْنِ A و B، اللتَيْنِ تَظهرانِ عليها، بحيثُ تكونُ العاصمةُ عمّانُ نقطةَ الأصلِ.

4 أُظهِرُ الشبكةَ فوقَ الصورةِ بِنَقرِ زرِّ الفأرةِ الأيمنِ، ثمَّ اختيارِ Settings، ومنها أختارُ background image

5 أَجِدُ مقياسَ رسمِ الخريطةِ، التي أدرجتُها، باتِّباعِ الخُطواتِ الآتيةِ:

- أختارُ أيقونةَ $\bullet^A$ مِنْ شريطِ الأدواتِ، ثمَّ أنقُرُ موقعَ العاصمةِ على الخريطةِ ليظهَرَ الحرفُ C، وَأنقُرُ موقعَ المُحافظةِ لِيَظهَرَ الحرفُ D، وَتَظهَرَ الإحداثياتُ في شريطِ الإدخالِ.
- أستعملُ صيغةَ المسافةِ بينَ نقطتَيْنِ لِأَجِدَ بُعدَ المُحافظةِ عَنِ العاصمةِ عمّانَ.
- أبحثُ في شبكةِ الإنترنت عَنِ المسافةِ الحقيقيَّةِ بينَ المُحافظةِ التي اخترتُها والعاصمةِ عمّانَ، ثمَّ أَجِدُ مقياسَ الرسمِ.

6 أَجِدُ المسافةَ الحقيقيَّةَ بينَ 3 مُحافظاتٍ أُخرى، باستعمالِ الخُطواتِ السابقةِ وَمقياسِ الرَّسمِ الذي أوجدتُهُ.

7 أستعملُ صيغةَ نقطةِ المُنتصَفِ في المُستوى الإحداثيِّ لِأَجِدَ نقطةَ المُنتصَفِ بينَ كلِّ محافظتَينِ مِنَ المحافظاتِ الثلاثِ التي اخترتُها في الخُطوةِ السابقةِ.

8 يُمكِنُني إيجادُ مُعادلةِ المُستقيمِ الواصلِ بينَ أيِّ مُحافظتَيْنِ على الخريطةِ بِالنَّقرِ على أيقونةِ Line مِنْ شريطِ الأدواتِ، ثُمَّ بالنّقرِ على كلٍّ مِنَ النقطتَينِ اللّتَينِ تمثّلانِ المحافظتَينِ، لِتظهرَ معادلةُ المُستقيمِ في شريطِ الإدخالِ.

9 أَجِدُ البُعدَ بينَ النقطةِ التي تمثّلُ إحدى المُحافظاتِ والمُستقيمِ مِنَ الخُطوةِ السابقةِ باستعمالِ صيغةِ البُعدِ بينَ نقطةٍ وَمُستقيمٍ.

عرضُ النتائجِ:

أُعِدُّ عرضًا تقديميًّا أُبيّنُ فيهِ خُطواتِ تنفيذِ المشروعِ موضّحةً بِالصُّوَرِ، وبعضَ الصُّعوباتِ التي واجهتُها في أثناءِ العملِ.

الدرس 1

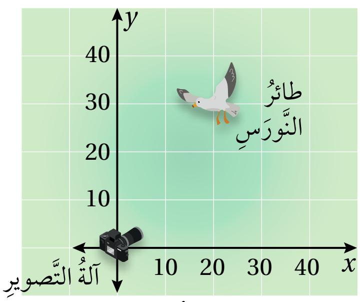
المسافةُ في المُستوى الإحداثِيِّ
Distance in the Coordinate Plane

فكرةُ الدرسِ

- إيجادُ المسافةِ بينَ نقطتَيْنِ في المُستوى الإحداثِيِّ.
- إيجادُ نقطةِ مُنتصفِ قطعةٍ مستقيمةٍ في المُستوى الإحداثِيِّ.

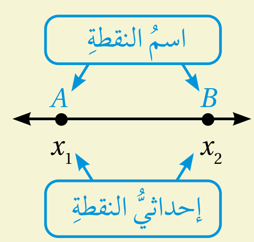
المصطلحاتُ المسافةُ، الإحداثِيُّ، نقطةُ المُنتصفِ.

مسألةُ اليومِ تلتقطُ آلةُ تصويرٍ صورًا عاليةَ الدقةِ للطيورِ التي تبعُدُ عنها 50 m أوْ أقلَّ. هلْ تلتقطُ الآلةُ صورةً عاليةَ الدقةِ لطائرِ النورسِ المُوَضَّحِ موقعُهُ في المُستوى الإحداثِيِّ المُجاورِ؟



المسافةُ بالمترِ

أتعلَّمُ



المسافةُ بينَ نقطتَيْنِ

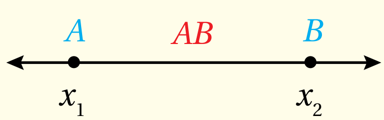
المسافةُ (distance) بينَ نقطتَيْنِ على خطِّ الأعدادِ هِيَ طولُ القطعةِ المستقيمةِ الواصلةِ بينَ هاتَيْنِ النقطتَيْنِ بحيثُ تمثّلانِ نهايَتَي القطعةِ، ويمكنُ استعمالُ **إحداثِيِّ** (coordinate) كلٍّ مِنَ النقطتَيْنِ لإيجادِ المسافةِ بينَهُما.

مفهومٌ أساسيٌّ

صيغةُ المسافةِ على خطِّ الأعدادِ

بالكلماتِ: المسافةُ بينَ نقطتَيْنِ على خطِّ الأعدادِ هِيَ القيمةُ المُطلقةُ للفرقِ بينَ إحداثِيَّيْهِما.

بالرُّموزِ: إذا كانَ إحداثِيُّ النقطةِ A على خطِّ الأعدادِ هُوَ x_1 وَإحداثِيُّ النقطةِ B هُوَ x_2، فإنَّ:



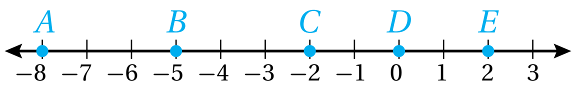
$$AB = |x_2 - x_1| \quad \text{or} \quad AB = |x_1 - x_2|$$

رُموزٌ رياضيَّةٌ

يُرمَزُ إلى القطعةِ المستقيمةِ التي نقطةُ بدايتِها A ونهايتِها B بالرَّمزِ $\overline{AB}$ أمّا طولُها فَيُرمَزُ إليهِ بالرَّمزِ AB

مثال 1

أستعمِلُ خطَّ الأعدادِ الآتيَ لأَجِدَ BE.



بما أنَّ إحداثيَّ النقطةِ B هُوَ -5، وَإحداثيَّ النقطةِ E هُوَ 2، فإنَّ:

$BE = \|x_2 - x_1\|$	صيغةُ المسافةِ على خطِّ الأعدادِ
$= \|2 - (-5)\|$	بتعويضِ $x_2 = 2, x_1 = -5$
$= 7$	بالتبسيطِ

أتحقَّقُ مِنْ فهمي

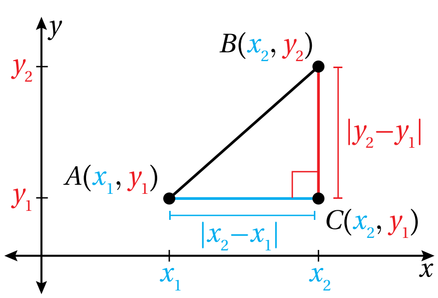
أستعمِلُ خطَّ الأعدادِ المُبَيَّنَ أعلاهُ لِأَجِدَ كُلًّا ممّا يأتي:

a) AD **b)** CB

أتعلَّمُ

بما أنَّ $\overline{BE}$ هُوَ نفسُهُ $\overline{EB}$، فإنَّ ترتيبَ اسمِ النقطتَيْنِ غيرُ مهمٍّ عندَ إيجادِ المسافةِ بينَهُما.

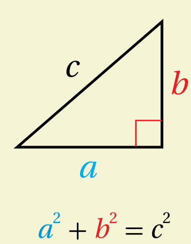
يُمكِنُني إيجادُ المسافةِ بينَ النقطتَيْنِ A وَ B في المُستوى الإحداثيِّ باستعمالِ نظريَّةِ فيثاغورس، وذلكَ بتشكيلِ مثلّثٍ قائمِ الزاويةِ يكونُ $\overline{AB}$ وَترًا فيهِ، كما في الشكلِ المُجاوِرِ، ثمَّ أستعمِلُ نظريَّةَ فيثاغورس لِأَجِدَ AB كالآتي:



$(AB)^2 = (AC)^2 + (CB)^2$	نظريَّةُ فيثاغورس
$= (\|x_2 - x_1\|)^2 + (\|y_2 - y_1\|)^2$	بتعويضِ $AC = \|x_2 - x_1\|$، $CB = \|y_2 - y_1\|$
$= (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$	مُرَبَّعاتُ الأعدادِ دائمًا موجبةٌ
$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$	بأخذِ الجذرِ التربيعيِّ لطرفَيِ المُعادلةِ

أتذكَّرُ

نظريَّةُ فيثاغورس



$a^2 + b^2 = c^2$

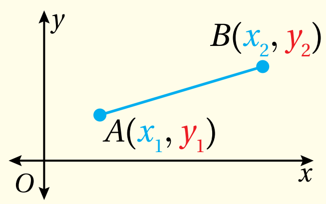
تُسَمّى الصيغةُ التي توصَّلْتُ إليها مِنْ نظريَّةِ فيثاغورس صيغةَ المسافةِ بينَ نقطتَيْنِ في المُستوى الإحداثيِّ.

مفهومٌ أساسيٌّ

صيغةُ المسافةِ في المُستوى الإحداثِيِّ

المسافةُ بينَ النقطتَيْنِ $A(x_1, y_1)$ وَ $B(x_2, y_2)$، هِيَ:

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$



أتعلَّمُ

مِنَ الأسهلِ إيجادُ طولِ القطعةِ المُستقيمةِ الأُفقيَّةِ في المُستوى الإحداثيِّ باستعمالِ صيغةِ المسافةِ على خطِّ الأعدادِ، وذلكَ بإيجادِ القيمةِ المُطلقةِ للفرقِ بينَ الإحداثيِّ x لكلٍّ مِنْ نُقطتَيْ نهايتَيِ القطعةِ، وَلإيجادِ طولِ القطعةِ المستقيمةِ العموديَّةِ أَجِدُ القيمةَ المُطلقةَ للفرقِ بينَ الإحداثيِّ y لكلٍّ مِنْ نقطتَيْ نهايتَيِ القطعةِ.

مثال 2

أَجِدُ المسافةَ بينَ النقطتَيْنِ $P(-7, 5)$ وَ $Q(4, -3)$، مقرّبًا إجابتي لأقربِ جُزءٍ مِنْ عشرَةٍ.

$PQ = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ صيغةُ المسافةِ في المُستوى الإحداثيِّ

$= \sqrt{(4 - (-7))^2 + ((-3) - 5)^2}$ بتعويضِ $(x_1, y_1) = (-7, 5)$، $(x_2, y_2) = (4, -3)$

$= \sqrt{(11)^2 + (-8)^2}$ بالتبسيطِ

$= \sqrt{185}$ بإيجادِ مُرَبَّعِ كلِّ عددٍ، والجمعِ

≈ 13.6 باستعمالِ الآلةِ الحاسبةِ

إذنْ، المسافةُ بينَ النقطتَيْنِ Q وَ P هِيَ 13.6 وحدةً تقريبًا.

أتعلَّمُ

عندَ إيجادِ المسافةِ بينَ نقطتَيْنِ في المُستوى الإحداثيِّ لا يكونُ ترتيبُ الإحداثيَّيْنِ x وَ y في كلِّ مجموعةٍ مِنَ الأقواسِ مهمًّا.

أتحقَّقُ مِنْ فهمي

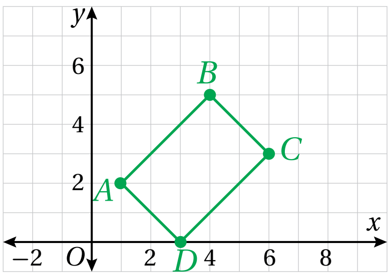
أَجِدُ المسافةَ بينَ كلِّ نقطتَيْنِ ممّا يأتي، مقرّبًا إجابتي لأقربِ جُزءٍ مِنْ عشرَةٍ (إنْ لَزِمَ):

a) $C(5, 0), D(-7, 9)$

b) $G(4, -2), H(8, -8)$

يمكنُ استعمالُ صيغةِ المسافةِ في تطبيقاتٍ حياتيَّةٍ، مثلِ إيجادِ المِساحةِ والمحيطِ في المُخَطَّطاتِ الهندسيَّةِ.

مثال 3 : مِنَ الحياةِ



حديقــةٌ: يظهرُ في المُســتوى الإحداثِــيِّ المُجاورِ مُخَطَّطُ قاعدةِ بيتٍ بلاســتيكيٍّ مستطيلِ الشكلِ بَنَتْهُ غيداءُ في فناءِ منزلِها الخلفــيِّ لزراعةِ النباتاتِ. إذا كانتْ كلُّ وَحدةٍ في المُســتوى الإحداثِيِّ تمثّلُ مترًا واحدًا، فَأَجِدُ مِساحةَ البيتِ البلاستيكيِّ.

لإيجادِ مِساحةِ البيتِ البلاســتيكيِّ، أَجِدُ طولَهُ وعرضَهُ باستعمالِ صيغةِ المسافةِ في المُستوى الإحداثِيِّ.

الخُطوةُ 1: أَجِدُ طولَ البيتِ البلاستيكيِّ.

أفترِضُ أنَّ طولَ البيتِ AB، وبما أنَّ $A(1, 2)$ و $B(4, 5)$، فإنَّ:

$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ صيغةُ المسافةِ في المُستوى الإحداثِيِّ

$= \sqrt{(4-1)^2 + (5-2)^2}$ بتعويضِ $(x_1, y_1) = (1, 2), (x_2, y_2) = (4, 5)$

$= \sqrt{(3)^2 + (3)^2}$ بالتبسيطِ

$= \sqrt{18}$ بإيجادِ مُرَبَّعِ كلِّ عددٍ، والجمعِ

$= 3\sqrt{2}$ بالتبسيطِ

إذنْ، طولُ البيتِ البلاستيكيِّ $3\sqrt{2}$ m

الخُطوةُ 2: أَجِدُ عرضَ البيتِ البلاستيكيِّ.

أفترِضُ أنَّ عرضَ البيتِ البلاستيكيِّ BC، وبما أنَّ $B(4, 5)$ و $C(6, 3)$، فإنَّ:

$BC = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ صيغةُ المسافةِ في المُستوى الإحداثِيِّ

$= \sqrt{(6-4)^2 + (3-5)^2}$ بتعويضِ $(x_1, y_1) = (4, 5), (x_2, y_2) = (6, 3)$

$= \sqrt{(2)^2 + (-2)^2}$ بالتبسيطِ

$= \sqrt{8}$ بإيجادِ مُرَبَّعِ كلِّ عددٍ، والجمعِ

$= 2\sqrt{2}$ بالتبسيطِ

إذنْ، عرضُ البيتِ البلاستيكيِّ $2\sqrt{2}$ m

معلومةٌ

للبيــوتِ البلاســتيكيَّةِ مُمَيِّزاتٌ عدّةٌ، مثلُ توفيرِ درجةِ حرارةٍ مناسبةٍ لنموِّ النباتاتِ؛ ما يتيحُ إمكانيَّةَ الزراعــةِ في أيِّ وقتٍ مِنَ العامِ.

أُفَكِّرُ

هلْ هذا هُوَ الحلُّ الوحيدُ للمثالِ؟ أبرّرُ إجابتي.

الخُطوةُ 3: أَجِدُ مِساحةَ البيتِ البلاستيكيِّ.

$$A = l \times w \quad \text{صيغةُ مساحةِ المستطيلِ}$$

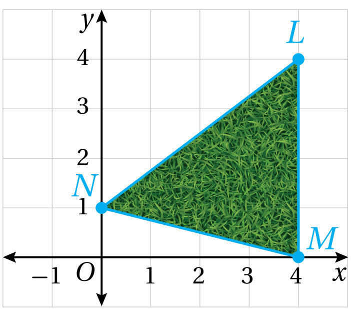
$$= 3\sqrt{2} \times 2\sqrt{2} \quad \text{بتعويضِ } l = 3\sqrt{2},\ w = 2\sqrt{2}$$

$$= 12 \quad \text{بالتبسيطِ}$$

إذنْ، مِساحةُ البيتِ البلاستيكيِّ $12\ m^2$

أتحقَّقُ مِنْ فهمي

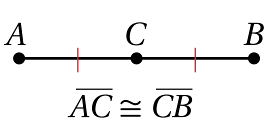
يظهرُ في المُســتوى الإحداثيِّ المُجاوِرِ مُخَطَّطُ حديقةٍ مثلّثةِ الشــكلِ، يرغبُ خالدٌ في تركيبِ مِرَشّــاتٍ لريِّها عندَ رؤوسِ المثلّثِ. إذا كانتْ كلُّ وحدةٍ في المُســتوى الإحداثــيِّ تمثّلُ مترًا واحدًا، فَأَجِدُ طــولَ الأنابيبِ التي تصلُ بينَ المِرَشّــاتِ الثلاثةِ، مقرّبًا إجابتي لأقربِ جُزْءٍ مِنْ عشرَةٍ.



نقطةُ مُنتصفِ القطعةِ المستقيمةِ

نقطةُ مُنتصفِ القطعةِ المســتقيمةِ (midpoint) هِيَ النقطةُ التي تقعُ في مُنتصفِ المسافةِ بينَ نقطتَيْ نهايَتَي القطعةِ المستقيمةِ.

فمثلًا، إذا كانــتْ C نقطةَ مُنتصــفِ $\overline{AB}$، فإنَّ $AC = CB$، وهذا يعني أنَّ $\overline{AC} \cong \overline{CB}$.



يُمكِنُني إيجــادُ نقطةِ مُنتصفِ قطعةٍ مســتقيمةٍ على خطِّ الأعدادِ بإيجادِ الوســطِ الحســابيِّ لإحداثِيَّيْ نقطتَيْ نهايَتَيْهِ.

أتذكَّرُ

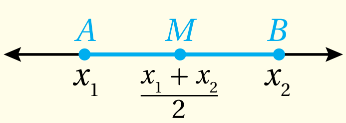
يــدلُّ الرَّمــزُ $\cong$ علــى التطابقِ، وتدلُّ الإشــارةُ الحمــراءُ فــي الشــكلِ المُجــاوِرِ علــى أنَّ $\overline{AC} \cong \overline{CB}$، أيْ أنَّ لهما الطولَ نفسَهُ.

مفهومٌ أساسيٌّ

صيغةُ نقطةِ المُنتصفِ على خطِّ الأعدادِ

إذا كانَ إحداثــيُّ النقطةِ A على خطِّ الأعدادِ هُوَ x_1 وَإحداثيُّ النقطةِ B هُوَ x_2، وكانتْ M نقطةَ مُنتصفِ $\overline{AB}$، فإنَّ إحداثيَّ M هُوَ:

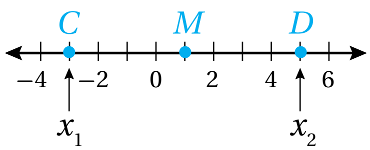
$$\frac{x_1 + x_2}{2}$$



مثال 4

1 **إذا كانَ إحداثيّا نقطتَيْ نهايَتَيْ $\overline{CD}$ هُما -3 وَ 5، فَأَجِدُ إحداثِيَّ نقطةِ مُنتصفِ $\overline{CD}$.**

أفترِضُ أنَّ $x_1 = -3$ وَ $x_2 = 5$، وأنَّ نقطةَ مُنتصفِ $\overline{CD}$ هِيَ M.



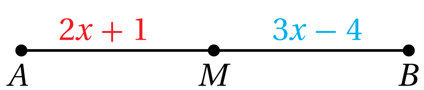
صيغةُ نقطةِ المُنتصفِ على خطِّ الأعدادِ $\quad \dfrac{x_1 + x_2}{2}$

بتعويضِ $x_1 = -3, x_2 = 5$ $\quad = \dfrac{-3+5}{2}$

بالتبسيطِ $\quad = \dfrac{2}{2} = 1$

إذنْ، إحداثِيُّ نقطةِ المُنتصفِ هُوَ 1

2 **في الشكلِ المُجاورِ، إذا كانتْ M نقطةَ مُنتصفِ $\overline{AB}$، فَأَجِدُ طولَ $\overline{MB}$.**



الخُطوةُ 1: أَجِدُ قيمةَ x.

تعريفُ نقطةِ مُنتصفِ قطعةٍ مستقيمةٍ	$\overline{AM} \cong \overline{MB}$
تعريفُ تطابقِ القطعِ المستقيمةِ	$AM = MB$
بالتعويضِ	$2x + 1 = 3x - 4$
بجمعِ 4 إلى طرفَيِ المُعادلةِ	$2x + 5 = 3x$
بطرحِ $2x$ مِنْ طرفَيِ المُعادلةِ	$5 = x$

الخُطوةُ 2: أَجِدُ طولَ $\overline{MB}$.

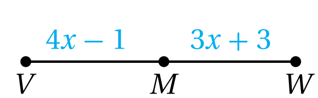
طولُ $\overline{MB}$	$MB = 3x - 4$
بتعويضِ $x = 5$	$= 3(5) - 4$
بالتبسيطِ	$= 11$

إذنْ، طولُ $\overline{MB}$ هوَ 11 وحدةَ طولٍ.

أتحقَّقُ مِنْ فهمي

a) إذا كانَ إحداثيّا نقطتَيْ نهايَتَيْ $\overline{PT}$ هُما -9 وَ 10، فَأَجِدُ إحداثِيَّ نقطةِ مُنتصفِ $\overline{PT}$.

b) في الشكلِ المُجاورِ، إذا كانتْ M نقطةَ مُنتصفِ $\overline{VW}$، فَأَجِدُ طولَ $\overline{VM}$ و طولَ $\overline{VW}$.



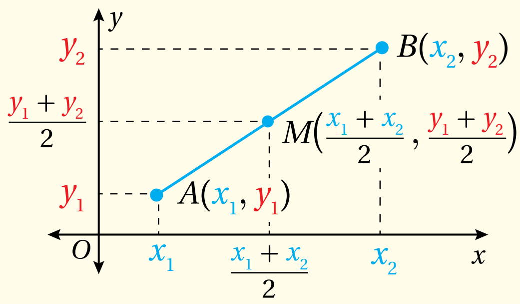
يمكنُ إيجادُ إحداثِيَّيْ نقطةِ مُنتصفِ قطعةٍ مستقيمةٍ في المُستوى الإحداثيِّ بإيجادِ الوسطِ الحسابيِّ لكلٍّ مِنَ الإحداثيِّ x والإحداثيِّ y لِنُقطتَيْ نهايَتَيْه.

مفهومٌ أساسيٌّ

صيغةُ نقطةِ المُنتصفِ في المُستوى الإحداثيِّ

إذا كانتْ $A(x_1, y_1)$ وَ $B(x_2, y_2)$ نقطتَيْنِ في المُستوى الإحداثيِّ، وَ M نقطةَ مُنتصفِ $\overline{AB}$، فإنَّ إحداثِيَّيْ M هُما:

$$M\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$$



مثال 5

أَجِدُ إحداثِيَّيِ النقطةِ M، التي تمثّلُ مُنتصفَ $\overline{PQ}$؛ حيثُ $P(-6, 3)$ وَ $Q(1, -1)$.

صيغةُ نقطةِ المُنتصفِ في المُستوى الإحداثيِّ $\qquad M\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$

بتعويضِ $(x_1, y_1) = (1, -1)$, $(x_2, y_2) = (-6, 3)$ $\qquad M\left(\frac{-6+1}{2}, \frac{3+(-1)}{2}\right)$

بالتبسيطِ $\qquad M\left(\frac{-5}{2}, 1\right)$

إذنْ، إحداثيّا النقطةِ M مُنتصفِ $\overline{PQ}$، هُما $\left(\frac{-5}{2}, 1\right)$

أتعلَّمُ

ترتيبُ إحداثِيَّيْ نقطتَيْ نهايَتَيِ القطعةِ المستقيمةِ ليس مهمًّا عندَ إيجادِ إحداثِيَّيْ نقطةِ مُنتصفِ قطعةٍ مستقيمةٍ.

أتحقَّقُ مِنْ فهمي

أَجِدُ إحداثِيَّيِ النقطةِ M، التي تمثّلُ مُنتصفَ $\overline{HI}$؛ حيثُ $H(5, -3)$ وَ $I(-1, -7)$.

يمكنُ إيجادُ إحداثِيَّيْ نقطةِ نهايةِ قطعةٍ مستقيمةٍ إذا عُلِمَ إحداثيّا نقطةِ النهايةِ الأُخرى للقطعةِ وإحداثيّا نقطةِ المُنتصفِ.

مثال 6

إذا كانتْ $M(2, 1)$ نقطةَ مُنتصفِ $\overline{JK}$؛ حيثُ $J(1, 4)$، فَأَجِدُ إحداثيَّي النقطةِ K.

الخُطوة 1: أعوّضُ الإحداثياتِ المعلومةَ في صيغةِ نقطةِ المُنتصفِ في المُستوى الإحداثيِّ.

أفترِضُ أنَّ $J(x_1, y_1)$ وَ $K(x_2, y_2)$.

$$M\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right) = M(2, 1)$$ صيغةُ نقطةِ المُنتصفِ في المُستوى الإحداثيِّ

$$M\left(\frac{1 + x_2}{2}, \frac{4 + y_2}{2}\right) = M(2, 1)$$ بتعويضِ $(x_1, y_1) = (1, 4)$

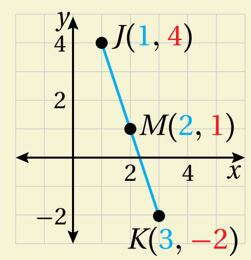
الخُطوة 2: أكتبُ مُعادلتَيْنِ، وأحلُّهُما لإيجادِ إحداثيَّيْ K.

أَجِدُ y_2	أَجِدُ x_2
$\frac{4 + y_2}{2} = 1$	$\frac{1 + x_2}{2} = 2$
$4 + y_2 = 2$	$1 + x_2 = 4$
$y_2 = -2$	$x_2 = 3$

إذنْ، إحداثيّا النقطةِ K هُما $(3, -2)$.

أتعلَّمُ

يُمكِنُني التحقُّقُ مِنْ معقوليَّةِ الإجابةِ بتمثيلِ النقاطِ الثلاثةِ في المُستوى الإحداثيِّ، وملاحظةِ أنَّ المسافةَ بينَ J وَ M تَظهَرُ مساويةً للمسافةِ بينَ M وَ K.

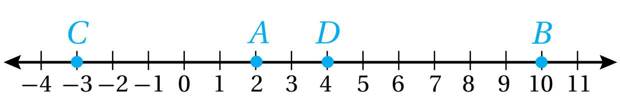


أتحقَّقُ مِنْ فهمي

إذا كانتْ $M(-5, 10)$ نقطةَ مُنتصفِ $\overline{EP}$؛ حيثُ $E(-8, 6)$، فَأَجِدُ إحداثيَّي النقطةِ P.

أتدرَّبُ وأحُلُّ المسائلَ

أستعمِلُ خطَّ الأعدادِ المُجاوِرَ لِأَجِدَ كُلًّا ممّا يأتي:



1. AB
2. CD
3. CB
4. AC

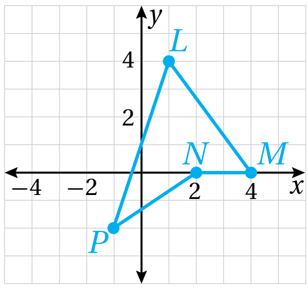
أَجِدُ المسافةَ بينَ كلِّ نقطتَيْنِ ممّا يأتي، مقرّبًا إجابتي لأقربِ جُزءٍ مِنْ عشرَةٍ (إنْ لَزِمَ):

7 $G(4, -5), H(0, 2)$

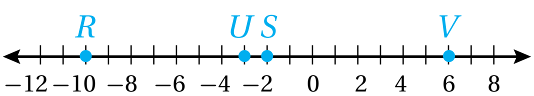
6 $E(6, -1), F(2, 0)$

5 $C(-1, 6), D(4, 8)$

8 أَجِدُ محيطَ المضلّعِ المُعطاةِ رؤوسُهُ في المُستوى الإحداثيِّ المُجاورِ.



أستعمِلُ خطَّ الأعدادِ المُجاورَ لِأَجِدَ إحداثيَّ نقطةِ المُنتصفِ لكلٍّ مِنَ القطعِ المستقيمةِ الآتيةِ:

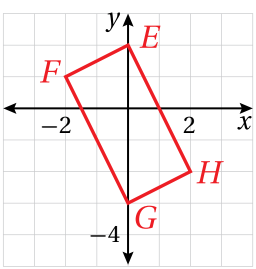


11 $\overline{VS}$

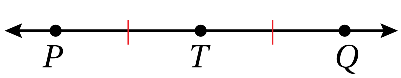
10 $\overline{UV}$

9 $\overline{RS}$

12 أَجِدُ مساحةَ المستطيلِ $FEHG$ المُعطاةِ رؤوسُهُ في المُستوى الإحداثيِّ المُجاورِ.



أستعمِلُ الشكلَ أدناهُ لِأَجِدَ PT في كلٍّ ممّا يأتي:



14 $PT = 7x - 24$, $TQ = 6x - 2$

13 $PT = 5x + 3$, $TQ = 7x - 9$

أَجِدُ إحداثيَّيْ نقطةِ مُنتصفِ $\overline{HK}$ في كلٍّ مِنَ الحالاتِ الآتيةِ:

17 $H(-6, 10), K(8, -2)$

16 $H(-4, -5), K(2, 9)$

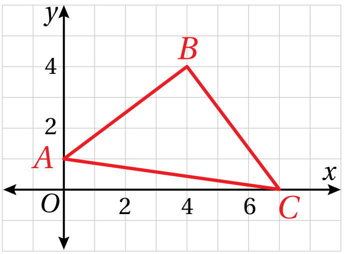
15 $H(7, 3), K(-4, -1)$

أَجِدُ إحداثيَّيْ نقطةِ نهايةِ القطعةِ المستقيمةِ $\overline{CD}$ المجهولةِ في كلٍّ ممّا يأتي. علمًا أنَّ M نقطةُ مُنتصفِ $\overline{CD}$:

20 $D(-4, 2), M(6, -1)$

19 $D(1, 7), M(-3, 1)$

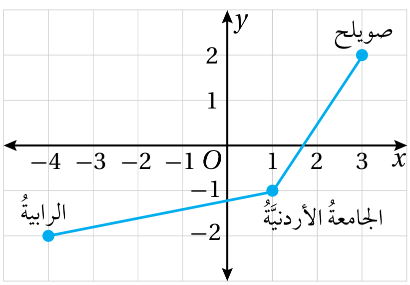
18 $C(-5, 4), M(-2, 5)$



أستعمِلُ الشكلَ المُجاورَ الذي يبيّنُ $\triangle ABC$ في المُستوى الإحداثيِّ، للإجابةِ عَنِ السؤالَيْنِ الآتِيَيْنِ تِباعًا:

21 أحدّدُ نوعَ المثلّثِ مِنْ حيثُ الأضلاعُ.

22 أَجِدُ محيطَ المثلّثِ.



23 **مسافةٌ:** تظهَرُ في المُستوى الإحداثيِّ المُجاورِ 3 مناطقَ في العاصمةِ عمّانَ، هِيَ: صويلحُ، والجامعةُ الأردنيّةُ، والرابيةُ. إذا كانتْ كلُّ وحدةٍ في المُستوى الإحداثيِّ تمثّلُ كيلومترًا واحدًا، فَأَجِدُ المسافةَ بينَ صويلحَ والجامعةِ الأردنيّةِ والمسافةَ بينَ الرابيةِ والجامعةِ الأردنيّةِ، مقرّبًا إجابتي لأقربِ جُزءٍ مِنْ عشرةٍ.

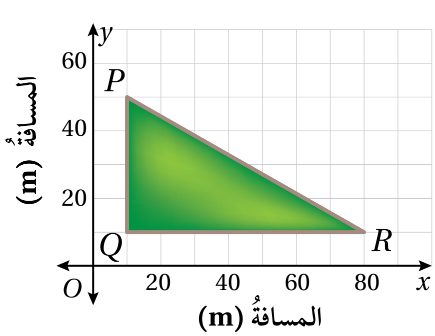
24 أحلُّ المسألةَ الواردةَ في بدايةِ الدرسِ.

مهاراتُ التفكيرِ العُليا

$$AB = \sqrt{(2-1)^2 + (6-(-4))^2}$$
$$= \sqrt{1^2 + 10^2}$$
$$= \sqrt{1 + 100}$$
$$= \sqrt{101} \approx 10$$

25 **أكتشِفُ الخطأَ:** وجدَ عمادٌ المسافةَ التقريبيَّةَ بينَ النقطتَيْنِ $A(6, 2)$ وَ $B(1, -4)$، كما هُوَ مُبيَّنٌ جانبًا. أكتشِفُ الخطأَ في حلِّ عمادٍ، وأصحّحُهُ.

26 **تبريرٌ:** تقعُ النقطةُ P على القطعةِ المستقيمةِ التي نهايَتاها النقطتانِ $A(1, 4)$ وَ $D(7, 13)$. إذا كانَتِ المسافةُ بينَ P وَ A ثلاثةَ أمثالِ المسافةِ بينَ P وَ D، فَأَجِدُ إحداثياتِ النقطةِ P. أبرّرُ إجابتي.



27 **تبريرٌ:** يبيّنُ الشكلُ المُجاورُ مُخَطَّطًا لحديقةٍ عامَّةٍ على شكلِ مثلّثٍ مُحاطةٍ بِمَمَرِّ مُشاةٍ. تمارسُ فيها مرامُ رياضةَ الركضِ، حيثُ انطلقَتْ على المَمَرِّ بسرعةٍ ثابتةٍ مقدارُها 130 m لكلِّ دقيقةٍ مِنْ P إلى Q ثمَّ مِنْ Q إلى R ثمَّ عادَتْ إلى P. كمْ دقيقةً تقريبًا استغرَقَتْ مرامُ للعودةِ إلى P مرّةً أخرى؟ أبرّرُ إجابتي.

الدرس 2

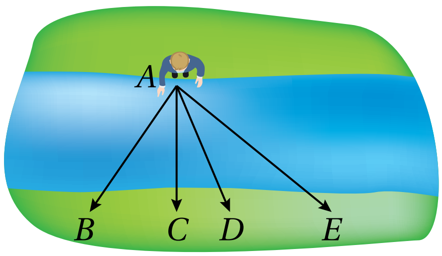
البُعْدُ بينَ نقطةٍ ومستقيمٍ
Distance between a Point and a Line

فكرةُ الدرسِ

- إيجادُ البعدِ بينَ نقطةٍ ومستقيمٍ.
- إيجادُ البعدِ بينَ مُستقيمَيْنِ مُتوازيَيْنِ.

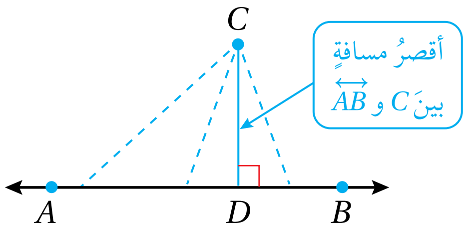
مسألةُ اليومِ

يحاولُ جمالٌ عبورَ جدولِ ماءٍ بالقفزِ مِنْ موقعِهِ عندَ النقطةِ A إلى الجهةِ الأُخرى مِنَ الجدولِ، كما يظهرُ في الشكلِ المُجاورِ. إلى أيِّ نقطةٍ يجبُ أنْ يقفزَ جمالٌ؟ أبرّرُ إجابتي.



البعدُ بينَ نقطةٍ ومستقيمٍ

البعدُ بينَ مستقيمٍ ونقطةٍ لا تقعُ عليهِ هُوَ طولُ القطعةِ المستقيمةِ العموديَّةِ على المستقيمِ مِنْ تلكَ النقطةِ، وتمثِّلُ أقصرَ مسافةٍ بينَ المستقيمِ والنقطةِ. فمثلًا، أقصرُ مسافةٍ بينَ النقطةِ C وَ $\overleftrightarrow{AB}$ هِيَ طولُ $\overline{CD}$.



أتذكَّرُ

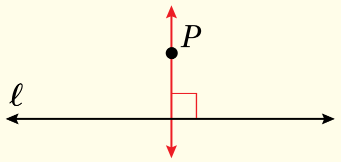
يشيرُ الرمزُ $\overleftrightarrow{AB}$ إلى المستقيمِ المارِّ بالنقطتينِ A و B.

تعلَّمتُ سابقًا كيفَ أُنشِئُ عمودًا على مستقيمٍ مِنْ نقطةٍ لا تقعُ عليهِ باستعمالِ فرجارٍ ومسطرةٍ، ويتضحُ مِنْ هذهِ الطريقةِ وجودُ مستقيمٍ عموديٍّ واحدٍ على الأقلِّ على مستقيمٍ معلومٍ مِنْ نقطةٍ لا تقعُ عليهِ، لكنَّ المُسلَّمَةَ الآتيةَ تنصُّ على أنَّ هذا المستقيمَ العموديَّ مستقيمٌ وحيدٌ.

مُسَلَّمَةٌ

مُسَلَّمَةُ التعامُدِ

لأيِّ مستقيمٍ ونقطةٍ لا تقعُ عليهِ يوجدُ مستقيمٌ واحدٌ فقط يَمُرُّ بالنقطةِ، ويكونُ عموديًّا على المستقيمِ المعلومِ.



أتذكَّرُ

المُسَلَّمَةُ عبارةٌ رياضيَّةٌ تُقبَلُ على أنَّها صحيحةٌ مِنْ غيرِ برهانٍ.

مثال 1

أَجِدُ البعدَ بينَ النقطةِ $(1, 0)$ والمستقيمِ l المارِّ بالنقطتَيْنِ $(3, 0)$ وَ $(1, 2)$.

الخُطوةُ 1: أَجِدُ مُعادلةَ المستقيمِ l.

• أَجِدُ ميلَ المستقيمِ l.

صيغةُ الميلِ $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

بالتعويضِ $(x_1, y_1) = (3, 0), (x_2, y_2) = (1, 2)$ $= \frac{2-0}{1-3}$

بالتبسيطِ $= \frac{2}{-2} = -1$

إذنْ، ميلُ المستقيمِ l هُوَ -1

• أَجِدُ مقطعَ المستقيمِ l مِنَ المحورِ y باستعمالِ ميلِهِ ونقطةٍ يَمُرُّ بها:

صيغةُ الميلِ والمقطعِ $y = mx + b$

بتعويضِ $m = -1, x = 3, y = 0$ $0 = -1(3) + b$

بجمعِ 3 لِطرَفَيِ المُعادلةِ $3 = b$

إذنْ، مُعادلةُ المستقيمِ l هِيَ: $y = 3 - x$

الخُطوةُ 2: أَجِدُ مُعادلةَ المستقيمِ w العموديِّ على المستقيمِ l والمارِّ بالنقطةِ $(1, 0)$.

بما أنَّ ميلَ المستقيمِ l الذي معادلتُهُ $y = 3 - x$ هُوَ -1؛ فإنَّ ميلَ المستقيمِ w العموديِّ على المستقيمِ l هُوَ 1

أَجِدُ مقطعَ المستقيمِ w مِنَ المحورِ y باستعمالِ ميلِهِ والنقطةِ التي يَمُرُّ بها.

صيغةُ الميلِ والمقطعِ $y = mx + b$

بتعويضِ $m = 1, x = 1, y = 0$ $0 = 1(1) + b$

بطرحِ 1 مِنْ طرفَيِ المُعادلةِ $-1 = b$

إذنْ، مُعادلةُ المستقيمِ w هِيَ: $y = x - 1$.

أتذكَّرُ

أستعمِلُ ميلَ المستقيمِ والمقطعِ y لكتابةِ مُعادلةِ مستقيمٍ بصيغةِ الميلِ والمقطعِ على الصورةِ $y = mx + b$.

أتذكَّرُ

- ميلُ المستقيمِ $y = mx + b$ هُوَ m
- حاصلُ ضربِ ميلَيِ المستقيمَيْنِ المُتعامدَيْنِ يُساوي -1

الخُطوةُ 3: أستعمِلُ مُعادلَتَي المُستقيمَيْنِ l وَ w لكتابةِ نظامِ مُعادلاتٍ وَحَلِّهِ لإيجادِ نقطةِ تقاطعِ المُستقيمَيْنِ.

مُعادلةُ المستقيمِ l	$y = -x + 3$
مُعادلةُ المستقيمِ w	$(+)\quad y = x - 1$
بحذفِ المُتغيِّرِ x	$2y = 2$
بقسمةِ طرفَيِ المُعادلةِ على 2	$y = 1$

أعوّضُ 1 بدلًا مِنْ y في إحدى المُعادلَتَيْنِ؛ لإيجادِ قيمةِ x.

مُعادلةُ المستقيمِ w	$y = x - 1$
بتعويضِ 1 بدلًا مِنْ y	$1 = x - 1$
بجمعِ 2 لطرفَيِ المُعادلةِ	$x = 2$

إذنْ، يتقاطعُ المستقيمانِ l وَ w في النقطةِ $(2, 1)$.

الخُطوةُ 4: أستعمِلُ صيغةَ المسافةِ بينَ نقطتَيْنِ لِأَجِدَ المسافةَ بينَ $(1, 0)$ وَ $(2, 1)$.

صيغةُ المسافةِ في المُستوى الإحداثيِّ	$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$
بتعويضِ $(x_1, y_1) = (1, 0)$, $(x_2, y_2) = (2, 1)$	$= \sqrt{(1 - 2)^2 + (0 - 1)^2}$
بالتبسيطِ	$= \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2}$
بإيجادِ مُربَّعِ كلِّ عددٍ، والجمعِ	$= \sqrt{2}$

إذنْ، البعدُ بينَ النقطةِ $(1, 0)$ والمستقيمِ l هِيَ $\sqrt{2}$ وحدةٍ.

أتحقَّقُ مِنْ فهمي

أَجِدُ البعدَ بينَ النقطةِ $(1, 0)$ والمستقيمِ l الذي مُعادلَتُهُ: $y = 3x + 3$

أتذكَّرُ

حلُّ نظامِ المُعادلاتِ الخَطِّيَّةِ بمُتغيِّرَينِ هُوَ زوجٌ مرتَّبٌ يحقِّقُ كلَّ مُعادلةٍ في النظامِ.

أتذكَّرُ

يمكنُ حلُّ نظامِ المُعادلاتِ بالحذفِ أوِ بالتعويضِ.

أتعلَّمُ

أَجِدُ البعدَ بينَ النقطةِ والمحورِ x بتحديدِ الإحداثيِّ y للنقطةِ، وَأَجِدُ البعدَ بينَ النقطةِ والمحورِ y بتحديدِ الإحداثيِّ x للنقطةِ.

صيغةُ البعدِ بينَ نقطةٍ ومستقيمٍ

تعلَّمتُ في المثالِ السابقِ إيجادَ البعدِ بينَ نقطةٍ ومستقيمٍ في المُستوى الإحداثيِّ باستعمالِ حلِّ المُعادلاتِ وصيغةِ المسافةِ بينَ نقطتَيْنِ، ويمكنُ أيضًا إيجادُ البعدِ بينَ نقطةٍ ومستقيمٍ في المُستوى الإحداثيِّ بشكلٍ مباشرٍ باستعمالِ الصيغةِ الآتيةِ:

مفهومٌ أساسيٌّ — **صيغةُ البعدِ بينَ نقطةٍ ومستقيمٍ**

البعدُ بينَ المستقيمِ l، الذي معادلَتُهُ: $Ax + By + C = 0$، وَالنقطةِ $P(x_1, y_1)$ يُعطى بالصيغةِ:

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

شريطةَ ألّا تكونَ قيمتا A وَ B معًا صِفرًا.

مثال 2

أَجِدُ البعدَ بينَ النقطةِ $(3, -5)$ والمستقيمِ $3x - 4y = 26$

الخُطوةُ 1: أكتبُ مُعادلةَ المستقيمِ على الصورةِ $Ax + By + C = 0$

$3x - 4y = 26$ مُعادلةُ المستقيمِ المُعطاةُ

$3x - 4y - 26 = 0$ بطرحِ 26 مِنْ طرفَيِ المُعادلةِ

إذنْ، $A = 3, B = -4, C = -26$

الخُطوةُ 2: أَجِدُ البعدَ بينَ النقطةِ والمستقيمِ.

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$ صيغةُ البعدِ بينَ نقطةٍ ومستقيمٍ

$$= \frac{|3(3)+(-4)(-5)+(-26)|}{\sqrt{(3)^2 + (-4)^2}}$$ بتعويضِ $A = 3, B = -4, C = -26, x_1 = 3, y_1 = -5$

$$= \frac{3}{5}$$ بالتبسيطِ

إذنْ، البعدُ بينَ النقطةِ والمستقيمِ $\frac{3}{5}$ وحدةٍ.

أتذكَّرُ

أكتبُ مُعادلةَ المستقيمِ على الصورةِ $Ax + By + C = 0$ قبلَ التطبيقِ في صيغةِ البعدِ بينَ نقطةٍ ومستقيمٍ.

أتذكَّرُ

أتّبعُ أولوياتِ العملياتِ الحسابيَّةِ عندَ التطبيقِ في قانونِ البُعدِ بينَ نقطةٍ ومستقيمٍ.

أتحقَّقُ مِنْ فهمي

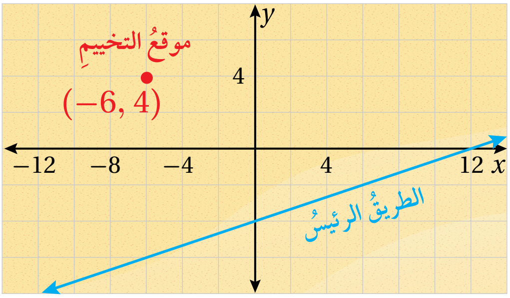
أَجِدُ البعدَ بينَ النقطةِ $(-1, 3)$ والمستقيمِ $3x - 4y = 16$

نحتاجُ في كثيرٍ مِنَ المواقفِ الحياتيَّةِ إلى تحديدِ أقصرِ مسافةٍ لتوفيرِ الوقتِ والجهدِ.

مثال 3 : مِنَ الحياةِ

معلومةٌ

يُسَمّى وادي رمٍّ أيضًا واديَ القمرِ؛ لأنَّ تضاريسَهُ تشبهُ تضاريسَ سطحِ القمرِ، كما أنَّهُ يُعَدُّ منطقةً سياحيَّةً مهمَّةً يرتادُها الزوّارُ والسيّاحُ مِنْ مُختلفِ أنحاءِ العالَمِ للتمتُّعِ بالطبيعةِ الصحراويَّةِ الخلّابةِ.



كشافةٌ: يظهرُ في المُستوى الإحداثيِّ المُجاورِ موقعُ تخييمِ مجموعةٍ كشفيَّةٍ في منطقةِ وادي رمٍّ. إذا أرادَتِ المجموعةُ العودةَ إلى مدينةِ العقبةِ عبرَ الطريقِ الرئيسِ، وكانتْ مُعادلةُ المستقيمِ التي تمثّلُ هذا الطريقَ المُؤدِّيَ إلى مدينةِ العقبةِ هِيَ $y = \frac{1}{3}x - 4$، فَأَجِدُ أقصرَ مسافةٍ بينَ موقعِ التخييمِ والطريقِ، مقرّبًا إجابتي لأقربِ جُزءٍ مِنْ عشرةٍ. علمًا أنَّ كلَّ وحدةٍ في المُستوى الإحداثيِّ تمثّلُ كيلومترًا واحدًا.

لإيجادِ أقصرِ مسافةٍ بينَ موقعِ التخييمِ والطريقِ الرئيسِ، أَجِدُ البُعدَ بينَ النقطةِ $(-6, 4)$ والمستقيمِ $y = \frac{1}{3}x - 4$.

الخُطوةُ 1: أكتبُ مُعادلةَ المستقيمِ على الصورةِ $Ax + By + C = 0$.

مُعادلةُ المستقيمِ المُعطاةُ: $y = \frac{1}{3}x - 4$

بكتابةِ المُعادلةِ على الصورةِ $Ax + By + C = 0$: $\frac{1}{3}x - y - 4 = 0$

إذنْ، $A = \frac{1}{3}, B = -1, C = -4$

الخُطوةُ 2: أَجِدُ البعدَ بينَ النقطةِ والمستقيم.

صيغةُ البُعدِ بينَ نقطةٍ ومستقيمٍ

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

بتعويضِ $A = \frac{1}{3}, B = -1,$ $C = -4, x_1 = -6, y_1 = 4$

$$= \frac{\left|\frac{1}{3}(-6)+(-1)(4)+(-4)\right|}{\sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2 + (-1)^2}}$$

باستعمالِ الآلةِ الحاسبةِ

$$\approx 9.5$$

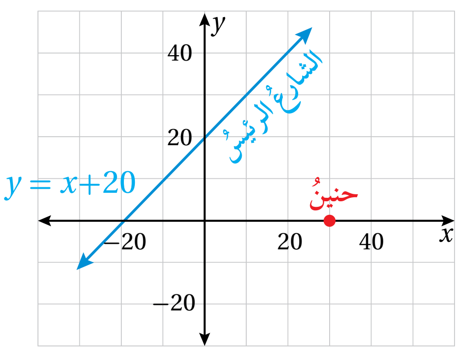
إذنْ، البعدُ بينَ موقعِ التخييمِ والطريقِ الرئيسِ 9.5 km تقريبًا.

أتعلّمُ

يمكنُ إيجادُ معادلةٍ مكافئةٍ للمعادلةِ $\frac{1}{3}x - y - 4 = 0$ بضربِ طرفَي المعادلةِ بالعددِ 3، وذلكَ لتسهيلِ الحساباتِ.

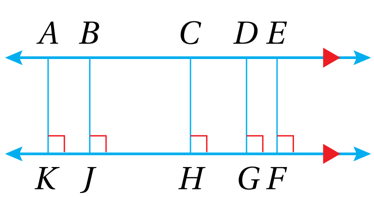
أتحقَّقُ مِنْ فهمي

يظهرُ في المُستوى الإحداثيِّ المُجاورِ موقعُ منزلِ حنينَ بالنسبةِ إلى الشارعِ الرئيسِ المُؤدّي إلى مدرستِها. إذا كانَتْ مُعادلةُ المستقيمِ الذي يمثّلُ الشارعَ الرئيسَ هِيَ $y = x + 20$، فَأَجِدُ أقصرَ مسافةٍ بينَ منزلِ حنينَ والطريقِ، مقرّبًا إجابتي لأقربِ جُزءٍ مِنْ عشرةٍ.



البعدُ بينَ مستقيمَيْنِ مُتوازِيَيْنِ

تعلَّمتُ سابقًا أنَّ المُستقيمَيْنِ المُتوازِيَيْنِ هُما مُستقيمانِ يقعانِ في المُستوى نفسِهِ، بحيثُ يكونُ البعدُ بينَهما ثابتًا، وهذا يعني أنَّ البعدَ بينَ أيِّ نقطةٍ على أحدِهما والمستقيمِ الآخَرِ ثابتٌ.



$AK = BJ = CH = DG = EF$

مفهومٌ أساسيٌّ

البعدُ بينَ مُستقيمَيْنِ مُتوازِيَيْنِ

البعدُ بينَ مُستقيمَيْنِ مُتوازِيَيْنِ هُوَ البعدُ بينَ أحدِ المُستقيمَيْنِ وأيِّ نقطةٍ على المستقيمِ الآخَرِ.

مثال 4

أَجِدُ البعدَ بينَ المستقيمَينِ المتوازِيَينِ m,n إذا كانتْ معادلتُهُما $3x + 4y + 8 = 0$, $3x + 4y + 10 = 0$ على الترتيبِ.

الخُطوةُ 1: أَجِدُ إحداثِيَّيْ نقطةٍ تقعُ على أحدِ المُستقيمَيْنِ.

أعوِّضُ $x = 0$ في مُعادلةِ المستقيمِ m لِأَجِدَ الإحداثِيَّ y المقابلَ لها.

مُعادلةُ المستقيمِ m $\quad 3x + 4y + 8 = 0$

بتعويضِ $x = 0$ $\quad 3(0) + 4y + 8 = 0$

بحلِّ المُعادلةِ $\quad y = -2$

إذنْ، تقعُ النقطةُ $(0, -2)$ على المستقيمِ m

الخُطوةُ 2: أَجِدُ البعدَ بينَ النقطةِ والمستقيمِ الآخَرِ.

أَجِدُ البعدَ بينَ النقطةِ $(0, -2)$ والمستقيمِ n؛ حيثُ $A = 3, B = 4, C = 10$.

صيغةُ البعدِ بينَ نقطةٍ ومستقيمٍ
$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

بتعويضِ $A = 3, B = 4,$ $C = 10, x_1 = 0, y_1 = -2$
$$= \frac{|3(0)+(4)(-2)+10|}{\sqrt{(3)^2 + (4)^2}}$$

بالتبسيطِ
$$= \frac{2}{5}$$

إذنْ، البُعدُ بينَ المُستقيمَينِ m وَ n هو $\frac{2}{5}$ وحدةٍ.

أتعلَّمُ

يمكنُ تحديدُ ما إذا كانَ المستقيمانِ مُتوازِيَيْنِ أمْ لا إذا كانَ لَهُما الميلُ نفسُهُ وكانَ المقطعُ y مُختلفًا.

أتحقَّقُ مِنْ فهمي

أَجِدُ البعدَ بينَ المُستقيمَيْنِ المُتوازِيَيْنِ m, n إذا كانتْ معادلتُهُما $x - 7y + 14 = 0$, $x - 7y - 11 = 0$ على الترتيبِ.

أتدرَّبُ وأحُلُّ المسائلَ

أَجِدُ البعدَ بينَ النقطةِ P والمستقيمِ l في كلٍّ ممّا يأتي مِنْ غيرِ استعمالِ صيغةِ البعدِ بينَ نقطةٍ ومستقيمٍ:

1. النقطةُ $P(2, 1)$ والمُستقيمُ l المارُّ بالنقطتَيْنِ $(-6, 0)$ وَ $(1, -4)$.
2. النقطةُ $P(-9, 2)$ والمُستقيمُ l المارُّ بالنقطتَيْنِ $(2, 8)$ وَ $(-2, 3)$.
3. النقطةُ $P(4, 4)$ والمُستقيمُ l المارُّ بالنقطتَيْنِ $(1, -3)$ وَ $(-7, 4)$.

أَجِدُ البعدَ بينَ النقطةِ P والمُستقيمِ l في كلٍّ ممّا يأتي باستعمالِ صيغةِ البُعدِ بينَ نقطةٍ ومستقيمٍ:

4. النقطةُ $P(5 , 7)$ والمُستقيمُ l المارُّ بالنقطتَيْنِ $(-2, 1)$ وَ $(0, 1)$.
5. النقطةُ $P(1 , -9)$ والمُستقيمُ l المارُّ بالنقطتَيْنِ $(4, 9)$ وَ $(4, -1)$.
6. النقطةُ $P(-3 , -10)$ والمُستقيمُ l المارُّ بالنقطتَيْنِ $(3, 1)$ وَ $(-8, -1)$.

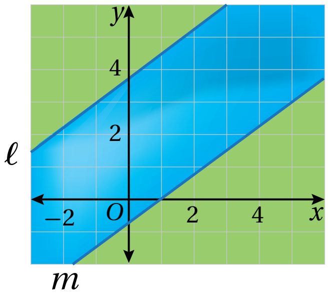
أَجِدُ البعدَ بينَ النقطةِ والمُستقيمِ في كلٍّ ممّا يأتي:

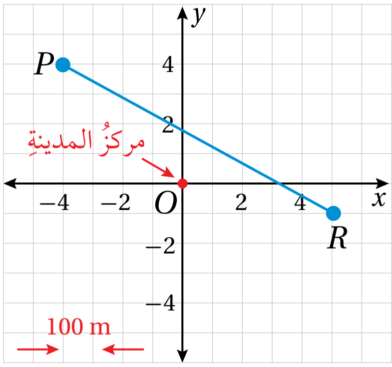
9. $y + \frac{1}{4}x = 1, S(4, 3)$
8. $y = x + 2, Q(2, 4)$
7. $y - \frac{1}{6}x + 6 = 0, P(-6, 5)$
12. $y - x = 0, R(5, 3)$
11. $x = 4, K(-2, 5)$
10. $y = -3, T(5, 2)$

أَجِدُ البعدَ بينَ كلِّ مُستقيمَيْنِ مُتوازِيَيْنِ في ما يأتي:

15. $2x - 3y + 4 = 0$, $y = \frac{2}{3}x + 5$
14. $12x + 5y - 3 = 0$, $12x + 5y + 7 = 0$
13. $4x - y + 1 = 0$, $4x - y - 8 = 0$

16. نهرٌ: يظهرُ في المُستوى الإحداثيِّ المُجاورِ جُزءٌ مِنْ نهرٍ يمثّلُ المُستقيمانِ l وَ m ضِفَّتَيْهِ. أَجِدُ عرضَ النهرِ، مقرّبًا إجابتي لأقربِ جُزءٍ مِنْ عشرةٍ. علمًا أنَّ كلَّ وحدةٍ في المُستوى الإحداثيِّ تمثّلُ 10 أمتارٍ.





يظهرُ في المُســـتوى الإحداثيِّ المُجاورِ منزلُ بســـمةَ الذي يقـــعُ عندَ النقطةِ P، ومنزلُ رشا الذي يقعُ عندَ النقطةِ R.

17 أَجِدُ طولَ الطريقِ بينَ منزلِ بسمةَ ومنزلِ رشا.

18 أَجِدُ النقطةَ التي تمثِّلُ مُنتصفَ الطريقِ بينَ منزلِ بسمةَ ومنزلِ رشا.

19 إذا كانَ مركزُ المدينةِ يقعُ عندَ نقطةِ الأصلِ، فَأَجِدُ أقصرَ مســـافةٍ بينَ هذا المركزِ والطريقِ الواصلِ بينَ منزلَيْ بسمةَ ورشا.

مهاراتُ التفكيرِ العُليا

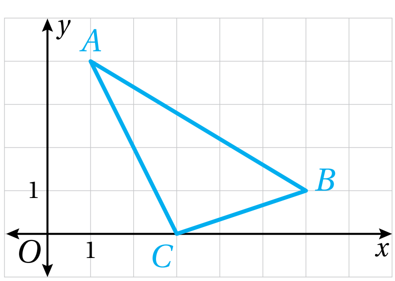
20 **أكتشِفُ الخطأَ:** وجدَ عمرانُ البعدَ بينَ المستقيمِ l الذي مُعادلَتُهُ: $y+2x-8=0$ والنقطةِ $P(1,-1)$، كما هُوَ مُبيَّنٌ أدناهُ. أكتشِفُ الخطأَ في حلِّ عمرانَ، وأصحِّحُهُ.

$$d=\frac{|Ax_1+By_1+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

$$=\frac{|1(1)+(2)(-1)+(-8)|}{\sqrt{(1)^2+(-1)^2}}$$

$$=\frac{9}{\sqrt{2}}$$

21 **تبريرٌ:** أَجِدُ مِساحةَ المثلّثِ المرسومِ في المُستوى الإحداثيِّ المجاورِ، وأبرّرُ إجابتي.



22 **تَحَدٍّ:** أَجِدُ إحداثيّي النقطةِ (النقاطِ) على المحورِ x، التي تَبْعُدُ 4 وحداتٍ عَنِ المستقيمِ $\frac{x}{3}+\frac{y}{4}=1$

أختارُ رمزَ الإجابةِ الصحيحةِ لكلٍّ ممّا يأتي:

1 المسافةُ بينَ النقطتَيْنِ $A(-1, 4)$ وَ $B(-3, -2)$، هيَ:

a) $\sqrt{26}$ b) $\sqrt{40}$ c) $\sqrt{20}$ d) $\sqrt{34}$

2 إحداثيّا نقطةِ منتصَفِ $\overline{CD}$؛ حيثُ $C(1, -2)$ وَ $D(-3, 6)$، هُما:

a) $(-1, 2)$ b) $(-1, 4)$

c) $(1.5, -0.5)$ d) $(-4.5, 1.5)$

3 إذا كانَتْ $M(-2, -6)$ نقطةَ مُنتَصَفِ $\overline{AB}$؛ حيثُ $B(7, 4)$، فإنَّ إحداثِيَّي النقطةِ A هُما:

a) $(-11, 16)$ b) $(11, -16)$

c) $(11, 16)$ d) $(-11, -16)$

أَجِدُ المسافةَ بينَ كلِّ نقطتَيْنِ ممّا يأتي، مقرّبًا إجابتي لِأقربِ جُزءٍ مِنْ عشرَةٍ (إنْ لَزِمَ):

4 $A(2, 2), B(6, 5)$

5 $N(-3, 2), M(9, 7)$

6 $P(1, 5), T(7, -3)$

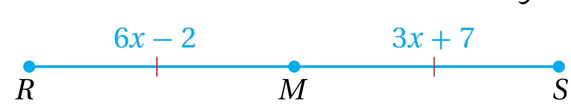
7 $F(-6, -4), J(9, 4)$

أَجِدُ إحداثِيَّيْ نقطةِ مُنتَصَفِ $\overline{AB}$ في كلٍّ مِنَ الحالاتِ الآتيةِ:

8 $A(8, 4), B(12, 2)$

9 $A(9, 5), B(8, -6)$

10 في الشكلِ الآتي، إذا كانَتْ M نقطةَ مُنتَصَفِ $\overline{RS}$، فَأَجِدُ طولَ $\overline{MR}$.



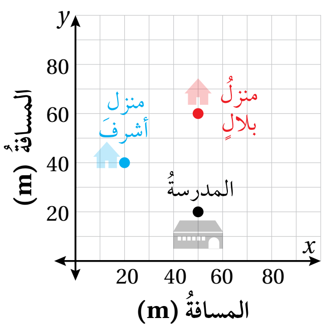
أَجِدُ البعدَ بينَ النقطةِ والمستقيمِ في كلٍّ ممّا يأتي:

11 $y = -x + 2, P(8, 4)$

12 $x - 3y + 9 = 0, Q(-13, 6)$

13 $y - 1 = 5x, S(3, 3)$

14 انطلقَ بلالٌ مِنْ منزلِهِ إلى المدرسةِ مرورًا بمنزلِ أشرفَ. أَجِدُ المسافةَ التي قطعَها بلالٌ مِنْ منزلِهِ إلى المدرسةِ، وأستعينُ بالمُستوى الإحداثيِّ أدناهُ.



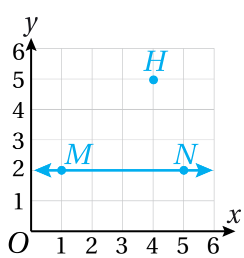
أَجِدُ البُعدَ بينَ كلِّ مستقيمَينِ متوازيَينِ في ما يأتي:

15 $x + 2y - 3 = 0$
$x + 2y + 4 = 0$

16 $9x + 12y + 10 = 0$
$9x + 12y - 20 = 0$

تدريبٌ على الاختباراتِ الدَّوليَّةِ

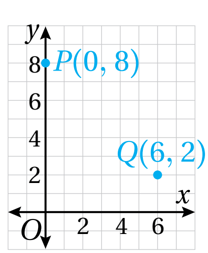
17 في الشكلِ المجاورِ، البُعدُ بينَ النقطةِ H والمستقيمِ المارِّ بالنقطتَينِ M وَ N يساوي:



a) 5 b) 3

c) 4 d) 2

18 أيُّ النقاطِ الآتيةِ تقعُ في مُنتَصَفِ المسافةِ بينَ النقطتَيْنِ P وَ Q، المُمَثَّلَتَيْنِ في المُستوى الإحداثيِّ المُجاورِ؟



a) $(7, 8)$ b) $(4, 4)$

c) $(3, 5)$ d) $(2, 2)$